technical or scientific nature is not prohibited.

SÉRIE VIII. — TOME IV. N° 5. MAI 1943.

LE JOURNAL DE PHYSIQUE
ET
LE RADIUM

GÉNÉRALISATION DES THÉORIES DE LA CONVECTION CALORIFIQUE. NOTION DE CONVECTION VIVE, CONSÉQUENCES TECHNIQUES. I

Par YVES ROCARD et MARCEL VÉRON.

Sommaire. — Le présent travail a d'abord pour objet d'approfondir et d'étendre la notion de convection calorifique, en vue de permettre un calcul approché des coefficients de convection dans des cas moins spéciaux que ceux actuellement pris en considération, puis d'inspirer une meilleure appréciation, peut-être aussi — dans certains cas — une conception plus rationnelle des matériels thermiques. Il précise, commente et généralise trois communications récemment présentées à l'Académie (1).

Nous serons amenés à distinguer deux sortes de convections : la *convection morte*, forme classique où le fluide chauffant ou refroidissant est thermodynamiquement passif, et la *convection vive*, nouvelle forme qui apparaît dans les cas où le fluide participe aussi à la création ou à la disparition de la chaleur sensible qu'il véhicule; tel est par exemple le cas d'une flamme, mélange gazeux en cours de combustion. Les réactions, la diffusion, le rayonnement, et toutes leurs combinaisons possibles, introduisent autant de variantes de la convection vive.

Pour la convection accompagnée d'une réaction, on présentera le coefficient de convection comme formé du coefficient de convection habituel, plus un *terme correctif* que nous appellerons terme vif; celui-ci devient sans objet quand le fluide reste passif.

On se tromperait très grossièrement si l'on appliquait le coefficient de convection morte à l'estimation du pouvoir chauffant d'une flamme venant lécher la sole d'un four, le terme correctif attaché à la convection vive étant alors non seulement très important, mais souvent *largement prépondérant*, au moins pour les flammes dites « actives ».

Il fait jouer des facteurs tout à fait étrangers à la convection classique mais familiers aux techniciens intéressés, telle la quantité de chaleur qui se trouve créée ou détruite dans l'unité de volume, par unité de temps; aussi sa considération éclaire-t-elle d'une lumière nouvelle une foule de faits plus ou moins connus, faits qu'on s'était peu soucié d'expliquer jusqu'ici.

Ainsi apparaît tout l'intérêt pratique des nouvelles notions.

Pour les rendre strictement quantitatives dans les différents cas d'espèce, beaucoup d'efforts conjugués seront nécessaires; mais elles semblent dès maintenant de nature à réaliser l'harmonie entre les données empiriques, les développements théoriques et le bon sens — à leur commun bénéfice.

I. — L'équation générale de la chaleur et le coefficient de convection.

1. L'équation restreinte de la chaleur. — L'équation classique qui règle la distribution de la température dans un fluide exprime que la quantité de chaleur sensible gagnée ou perdue *dans l'unité de temps par l'unité de volume du fluide suivi dans son déplacement* éventuel a dû passer par conductibilité thermique à travers les surfaces qui la limitent.

On sait que par l'unité de surface perpendiculaire à un axe Ox passe une quantité de chaleur proportionnelle au coefficient de conductibilité λ et au gradient de température $\frac{\partial T}{\partial x}$.

Découpons dans le fluide un élément de volume cubique ou prismatique *mobile* dont les arêtes, de longueur unité, sont parallèles à trois axes Ox, Oy, Oz.

Si l'on considère ses deux faces opposées, séparées par l'unité de distance dans la direction Ox, il entre par la première, dans l'unité de temps, la quantité de chaleur $\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$, qui sort par la seconde, augmentée de sa différentielle $\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ par rapport à x. La chaleur

(1) *C. R. Acad. Sc.*, 1941, **213**, p. 988; 1942, **214**, p. 301; 1942, **215**, séance du 3 novembre.

Reproduced and Distributed in the Public Interest by
THE ALIEN PROPERTY CUSTODIAN

nette gagnée ou perdue entre les deux faces considérées est donc $\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

A ce flux calorifique gagné ou perdu dans la direction Ox s'ajoutent les flux gagnés ou perdus dans les directions Oy et Oz.

La variation totale de chaleur par unité de volume dans l'unité de temps est donc

$$\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right).$$

Cette variation de chaleur sensible se traduisant par une variation de température $\mathrm{d}T$ dans le temps $\mathrm{d}t$, elle est encore égale à $c\rho\frac{dT}{dt}$, où ρ représente la masse spécifique et c la chaleur spécifique par unité de masse.

Égalant les deux formes de la chaleur sensible perdue par l'unité de volume du fluide dans l'unité de temps, nous obtenons

$$c\rho\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right).$$

En général, *le fluide est en mouvement*, et l'on devra par conséquent calculer la dérivée $\frac{dT}{dt}$ de sa température en l'accompagnant dans son mouvement.

La température T dépend alors non seulement du temps t comme en un point de coordonnées fixes données, mais aussi des coordonnées x, y, z à un instant donné de la masse considérée; sa variation totale en un point entraîné par le fluide est donc

$$\mathrm{d}T=\frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial T}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial T}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial T}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

Divisons par $\mathrm{d}t$ pour faire apparaître sa dérivée, en notant que $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ ne sont autres que les composantes u, v, w de la vitesse du fluide.

Ainsi apparaît l'équation classique de distribution des températures

$$c\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right)-\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)=0 \quad (1)$$

Les termes dits de convection sont ceux où figurent explicitement les vitesses u, v, w; ils représentent la contribution que le mouvement du fluide apporte à la distribution des températures dans son sein.

Cette équation reçoit en général une démonstration différente. Considérant un volume $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ *fixe dans l'espace*, on écrit qu'à la chaleur d'échauffement près, le fluide y apporte par ses composantes de vitesse la chaleur qu'en emporte la conductibilité. Cette vue s'identifie évidemment à la précédente, mais sa présentation prépare moins bien à ce qui suit.

Pratiquement, on ne considère que le *régime permanent*, tel que la vitesse et la température du fluide soient stationnaires en chaque point. La différentielle $\frac{\partial T}{\partial t}$ est alors nulle.

2. **Le coefficient de convection**. — La chaleur qui, en régime permanent, passe de la masse fluide à une paroi solide qu'elle baigne, est directement liée à la distribution des températures T au voisinage même de la paroi.

En effet, cette quantité de chaleur doit transiter par conductibilité à travers la couche fluide qui reste immobile au contact immédiat de la paroi, quel que soit le type d'écoulement considéré.

Si l'on nomme Oy l'axe normal à la paroi, orienté vers le fluide, la quantité de chaleur qui est ainsi transférée du fluide à la paroi ($y = 0$) dans l'unité de temps et par unité de surface commune a pour expression

$$Q_p=\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}.$$

Il est commode de rapporter cette quantité de chaleur à une différence de température caractérisant le champ thermique étudié, par exemple à la différence $T_\infty-\theta_0$ qui existe entre la température T_∞ prise loin dans le fluide et la température θ_0 prise à la surface du solide. On pose alors

$$Q_p=\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}=\alpha(T_\infty-\theta_0).$$

Ceci suppose un fluide plus chaud que la paroi.

Si le fluide est plus froid que la paroi, $(T_\infty-\theta_0)$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$ changent simultanément de signe, et les équations précédentes représentent encore bien la chaleur qui est transférée de la paroi au fluide par unités de surface, de temps et d'écart thermique, en l'admettant négative.

Le facteur α ainsi introduit a été appelé « coefficient de convection ». Il caractérise l'aptitude du fluide à transférer la chaleur, indépendamment des différences de température, puisque le rapport

$$\frac{\alpha}{\lambda}=\frac{1}{T_\infty-\theta_0}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$$

est sans dimensions par rapport aux températures.

Si les températures T_∞ et θ_0 varient d'un point à l'autre de la surface, il faudra évidemment envisager une définition locale de α.

Pour un écoulement à une seule direction Ox, on aura

$$\alpha_x=\frac{\lambda}{(T_\infty-\theta_0)_x}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{x,y=0}. \quad (2)$$

La définition (2) du coefficient de convection peut être considérée comme *absolument générale*, tandis que l'équation de la chaleur (1) ne l'est pas.

3. **L'équation généralisée de la chaleur**. — La chaleur sensible $c\rho\frac{dT}{dt}$, qui dans l'unité de temps

12

apparaît ou disparaît dans l'unité de volume du fluide, peut bien y être venue ou l'avoir quittée par transfert à travers les surfaces-limites, mais elle peut aussi y avoir été créée ou dissipée entre ces limites : si le fluide est le siège d'une réaction chimique ou d'une transformation physique qui y dégage ou qui y absorbe de la chaleur; s'il s'y produit une diffusion qui substitue du fluide plus ou moins chaud à du fluide plus ou moins froid; s'il est soumis à un rayonnement qui le chauffe ou le refroidit directement, etc.

Appelons d'une façon générale $\pm q$ la quantité de chaleur qu'apportent ou qu'empruntent à l'unité de volume et par unité de temps toutes ces nouvelles causes énumérées, et toutes autres que l'on pourrait imaginer.

L'équation complétée de la chaleur s'écrit évidemment

$$c\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right)-\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)=\pm q, \quad (3)$$

q étant généralement une fonction de x, y, z, u, v, w et t.

Le double signe $\pm$ rappelle qu'en plus du cas, essentiel en pratique, où une réaction exothermique tend à élever la température du fluide par un q positif souvent très sensible, il faut envisager aussi les cas des réactions endothermiques, des diffusions froides, des pertes par rayonnement, ou même des évolutions physiques vers des états moins condensés (vaporisations, fusions), qui tendent à l'abaisser par un q négatif.

4. Formes possibles de la chaleur sensible créée ou détruite. — Explicitons q dans quelques cas, avec les approximations permises en pareille matière :

1° Le rayonnement réciproque entre une couche fluide à température T et des parois opaques à température $\theta_0 \neq T$ comporte une double infinité de réflexions et d'absorptions. Si le fluide est isotherme et n'offre qu'un constituant doué d'absorption, avec une « épaisseur réduite » l (produit de sa concentration partielle γ par la pression totale p et l'épaisseur réelle L) ([2]), il y apparaît, par unité de surface parallèle aux parois et par unité de temps, une quantité de chaleur rayonnée :

$$Q_R = \frac{E_{\theta_0} - E_T}{\dfrac{1}{a_{l_T}} + \dfrac{1}{a_{\theta_0}} - 1} \quad ([3]).$$

([2]) La notion d'épaisseur réduite postule que les degrés d'activation des gaz sont autonomes, et qu'en particulier la présence de gaz « inertes » n'influe pas sur le degré d'activation des gaz émetteurs, ce qui n'est pas toujours strictement vérifié.

([3]) *Voir* M. VÉRON, *Tendances actuelles des techniques de la chaleur*, p. 74 et suivantes.

E_{θ_0} et E_T sont les pouvoirs émissifs du corps noir aux températures θ_0 et T :

$$E_{\theta_0} - E_T = \sigma(\theta_0^4 - T^4), \qquad \text{avec } \sigma = 4{,}91 \frac{\text{gr-cal}}{m^2 \times h \times {}^\circ K^4}.$$

a_{θ_0} est le pouvoir absorbant (ou émissif relatif) des parois; si on les assimile à des corps noirs :

$$a_{\theta_0} = 1.$$

a_{l_T} est le pouvoir absorbant de la veine sous l'épaisseur réduite l, à la température T :

$$a_{l_T} = \frac{\displaystyle\sum_{\text{bandes}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [1-(1-a_{\lambda_{T_{l=1}}})^l] E_{\lambda_T} d\lambda}{\displaystyle\int_0^\infty E_{\lambda_T} d\lambda}.$$

Le signe $\sum\limits_{\text{bandes}}$ rappelle que l'émission des fluides procède par bandes de longueur d'onde, généralement très étroites; dans chacune de ces bandes, la valeur *moyenne* de $a_{\lambda_{T_{l=1}}}$ dépend très peu de T, en sorte qu'on peut sortir de l'intégration le facteur où elle intervient.

On a donc assez sensiblement :

$$a_{l_T} \simeq \sum_{\text{bandes}} [1-(1-a_{l=1})^l] \frac{\displaystyle\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_{\lambda_T} d\lambda}{\displaystyle\int_0^\infty E_{\lambda_T} d\lambda} = f(l)\varphi(T),$$

la fonction $f(l)$ étant une fonction croissante amortie de l, et $\varphi(T)$ une fonction généralement décroissante de T, qu'en première approximation on écrira $T^{-\beta}$, avec $\beta > 0$.

Si plusieurs constituants rayonnants sont mêlés sans réagir, leurs pouvoirs absorbants a_{l_T} s'ajoutent.

D'autre part, le volume gazeux mis en cause par unité de surface d'une couche d'épaisseur réelle L est égal à $L = \dfrac{l}{\gamma p}$.

La chaleur qu'apporte (ou qu'emporte) le rayonnement, par unités de surface et de temps, peut donc s'écrire :

$$\pm q = \frac{Q_R}{L} = \sigma p \sum_{\text{fluides}} F(l) \frac{\theta_0^4 - T^4}{T^\beta}, \quad (4)$$

où $F(l) = \gamma \dfrac{f(l)}{l}$ est une fonction *décroissante* de l.

En fait, la convection empêche la veine d'être isotherme, mais l'expression (4) s'applique avec une approximation souvent suffisante à chacun des éléments de filets pris avec sa température T propre.

2° La diffusion d'un autre fluide, plus chaud ou moins chaud, se traiterait comme il suit :

Soit τ le « taux » du nouveau fluide par rapport au fluide principal, et soit D le coefficient de diffusion. A travers l'unité de surface perpendiculaire à Ox

et dans l'unité de temps passent par définition $D\frac{\partial T}{\partial x}$ unités de volume du nouveau fluide.

L'apport de ce fluide dans l'unité de volume par unité de temps sera donc

$$D\left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2}\right).$$

Si, en se substituant au fluide principal, l'unité de volume du nouveau fluide apporte $\pm q_0$ calories, il vient

$$\pm q = \pm q_0 D\left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2}\right). \tag{5}$$

Le transfert de chaleur par turbulence, qui s'apparente au cas précédent, sera étudié plus loin dans un chapitre spécial.

3° Pour le cas, très important en pratique puisque c'est celui des flammes, où la chaleur naît dans le fluide du fait d'une réaction chimique, nous raisonnerons sur un exemple simple mais facile à généraliser.

Considérons un écoulement dans la direction Ox, parallèlement à une paroi, et admettons que des molécules d'un type unique y agissent sur d'autres molécules d'un type unique pour donner des molécules d'un composé défini unique, par exemple

$$H_2 + \frac{1}{2}(O_2 + 4N_2) = H_2O + 2N_2.$$

Soit n le nombre des molécules primitives d'un type (H^2 par exemple), qui sont encore présentes dans l'unité de volume du fluide au temps t et à l'abscisse x, sur le filet de vitesse u; soit $\pm q_1$ leur chaleur de réaction moléculaire.

Dans l'unité de temps se combinent $-\frac{dn}{dt}$ molécules (« vitesse de réaction »); elles « actualisent » $\mp\frac{dn}{dt}q_1$ calories.

On a évidemment

$$\pm q = \mp q_1 \frac{dn}{dt}.$$

Il faut connaître l'évolution de n en fonction de t.

Nous admettrons que la vitesse de réaction varie par exemple suivant une loi

$$-\frac{dn}{dt} = an,$$

a étant une fonction supposée connue de la température T, *qui dépend elle-même du temps t.*

On en tire

$$\frac{dn}{n} = -a(t)\,dt, \quad \text{puis} \quad n = n_0\, e^{-\int_0^t a(t)\,dt},$$

n_0 représentant le nombre des molécules initiales qui intéressent l'unité de volume à l'instant quelconque t. Il est égal au nombre N_0 des molécules initialement comprises dans cette unité de volume, raréfié dans le rapport inverse de la dilatation subie par le volume initial.

Pour les liquides, la dilatation est négligeable; on a

$$n_0 = N_0.$$

Pour les gaz, on peut souvent admettre qu'en raison du ballast d'azote apporté par l'air, la réaction est équimoléculaire et qu'ainsi le volume actuel suit la loi des gaz parfaits; on a

$$n_0 = N_0\frac{T_0}{T}.$$

t est le temps pour un observateur qui accompagne les molécules dans leur mouvement; suivant la direction x, sa différentielle s'écrit donc

$$dt = \frac{dx}{u}.$$

Le nombre des molécules actives encore présentes dans l'unité de volume à l'instant considéré apparaît ainsi égal à

$$n = N_0\frac{T_0}{T}\, e^{-\int_0^x a(T)\frac{dx}{u}},$$

et leur chaleur de réaction prend la forme

$$\pm q = \pm q_1 an = \pm q_1 a N_0 \frac{T_0}{T}\, e^{-\int_0^x a(T)\frac{dx}{u}}.$$

Le groupement q_1N_0 est la chaleur potentielle totale des molécules qui sont initialement contenues dans l'unité de volume; c'est une donnée essentielle du fluide considéré; nous la désignerons par $Q_f > 0$, puisque le signe convenable figure explicitement dans la formule précédente.

Finalement, la chaleur dégagée par unités de volume et de temps prend pour expression

$$\pm q = \pm Q_f \frac{aT_0}{T}\, e^{-\int_0^x a(T)\frac{dx}{u}}, \tag{6}$$

où le facteur $\frac{T_0}{T}$, valable pour les gaz, est à supprimer pour les liquides.

Cette expression de q a une valeur très générale et elle s'applique à toute loi de réaction propre aux molécules considérées, car la température T et le nombre actuel n des molécules étant liés par l'évolution de la réaction, la loi que nous avons admise pour la vitesse de réaction équivaut à une loi d'aspect plus général

$$-\frac{dn}{dt} = a(T, n),$$

et elle englobe donc toute loi particulière des cinétistes, telle que

$$-\frac{dn}{dt} = bT^p n^q.$$

5. **Position du problème concernant le coefficient de convection.** — Par les expressions (4), (5), (6) de q, nous formons des équations de la chaleur (3) qui généralisent l'équation classique (1).

Elles ne sont peut-être pas nouvelles *en elles-mêmes*, et il est à souhaiter que les termes introduits aient déjà été considérés effectivement toutes les fois qu'ils existaient, encore que nous n'ayons vu figurer le « terme complémentaire » q que dans l'équation de la conduction accompagnée d'effet Joule, conduction qu'on pourrait aussi qualifier de *vive*.

Mais, ce qui est essentiel, les conséquences *concernant le coefficient de convection* défini par l'équation (2) n'en ont pas été tirées. A notre connaissance tout au moins, les physiciens n'ont calculé que des coefficients de convection répondant par la formule (2) à des distributions de température régies par l'équation restreinte (1).

Leurs expressions, largement diffusées, et les valeurs numériques qu'en déduisent les ingénieurs, supposent ainsi réellement, sans qu'on y prenne garde, que la chaleur transmise vient du fluide préalablement chauffé et est apportée uniquement par son mouvement, pour être transportée finalement au solide par la conductibilité du fluide.

Or, d'après la relation (2) qui les définit, les coefficients de convection sont conditionnés par les gradients de température à la paroi, qui eux-mêmes sont régis par le « terme complémentaire » q, concuremment avec les facteurs classiques λ, c, ρ, u, v, w, x, z.

Toutes choses égales par ailleurs, il existe donc autant de coefficients de convection qu'il y a de distributions possibles pour la chaleur q créée par unités de volume et de temps, c'est-à-dire qu'il y a de sources de cette chaleur, et même de combinaisons de ces sources.

En particulier, le coefficient de convection d'un fluide dépend de son rayonnement, ce qui proscrit déjà en principe l'existence d'une expression universelle du coefficient de convection, valable aussi bien pour un fluide pratiquement non émissif (comme l'air) que pour un fluide nettement émissif (comme une fumée).

Inversement, le rayonnement d'une veine fluide dépend en principe de sa distribution de températures, et par conséquent de ses échanges par convection.

La conception habituelle qui ajoute les flux de chaleur échangés par convection et par rayonnement calculés indépendamment l'un de l'autre est donc fausse, mais elle est trop commode pour qu'on l'abandonne.

Les couches fluides immédiatement voisines des parois offrent d'ailleurs avec elle des écarts thermiques restreints (nuls à la limite pour $y = 0$), de sorte qu'en fait leur rayonnement réciproque avec ces parois est limité, n'influençant donc qu'assez peu la distribution locale des températures au contact, qui régit le coefficient de convection.

Nous nous proposons de déterminer d'abord les coefficients de convection déduits de l'équation généralisée de la chaleur (3) dans le cas de l'écoulement laminaire, avec le terme complémentaire q fixé par l'expression (6), c'est-à-dire pour un fluide en réaction, le rayonnement et la diffusion étant encore négligés; ces formes moins massives de la chaleur créée feront l'objet d'une étude ultérieure.

Afin de rendre notre exposé plus intelligible en facilitant les comparaisons, nous avons jugé utile de résumer auparavant le travail classique fondé sur l'emploi de l'équation restreinte (1).

Nous avons évité d'y introduire d'entrée la notion de « couche-limite ». On verra que si l'on s'en tient à ce qui se passe dans son épaisseur, la forme du coefficient de convection n'est pas affectée; seules ses constantes sont légèrement modifiées, en convection vive comme en convection morte; mais il était désirable de n'en pas préjuger.

II. — La convection morte d'un fluide passif s'écoulant en régime laminaire permanent le long d'une plaque.

Nous rappelons que nous entendons par fluide « passif » ou « mort », un fluide plus ou moins chaud, dont la température peut varier, mais dans lequel la chaleur ne peut entrer ou sortir d'un élément de volume mobile que par le mécanisme de la conductibilité.

Dans un tel fluide, l'équation de la chaleur est l'équation restreinte (1), dont la résolution suppose connue la distribution des vitesses.

1. **Solution de Blasius pour la distribution des vitesses.** — Soient Ox un axe pris dans le sens de l'écoulement le long d'une surface cylindrique ou assimilable, et Oy un axe perpendiculaire à sa surface.

P représentant la pression, μ la viscosité absolue et Ψ la fonction potentielle des vitesses, les équations classiques de l'hydrodynamique des fluides visqueux *incompressibles* s'écrivent d'une façon générale

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), & (a) \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} + \dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), & (b) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \text{avec } u = \dfrac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial x}. & (c) \end{cases}$$

On a évidemment

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad v \ll u,$$

ce qui permettra de négliger les termes où entrent $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et les différentielles de v ([4]).

D'après l'équation (b), où celles-ci figurent à tous les termes sauf un, le gradient de pression normal $\frac{\partial P}{\partial y}$ devient négligeable; la pression P n'est plus fonction que de x; elle se trouve donc imposée par un phénomène extérieur au fluide.

L'hypothèse fondamentale formulée par Blasius est qu'à grande distance de la paroi, les forces de frottement dues à la viscosité μ n'agissent pas; la vitesse u ne dépendant plus de y devient là $u_\infty(x)$, et ses différentielles par rapport à y disparaissent.

L'équation (b) donne alors

$$u_\infty \frac{\partial u_\infty}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x},$$

d'où, en substituant dans les équations générales à distance finie,

$$\left\{\begin{array}{ll} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = u_\infty \frac{\partial u_\infty}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; & (a) \\ u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, & (c) \\ \text{avec} \quad u = v = 0 \quad \text{et} \quad \Psi = 0 \quad \text{pour} \quad y = 0. & \end{array}\right.$$

Puisque nous avons supposé (en c) *le fluide incompressible, nous devons logiquement admettre qu'il ne se dilate pas* (liquide ou gaz presque isotherme), ce qui, *pour un écoulement plan*, entraîne évidemment

$$u_\infty(x) = \text{const.}; \qquad \text{donc} \qquad \frac{\partial u_\infty}{\partial x} = 0.$$

Il reste alors pour (a) l'expression fondamentale

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad (a')$$

en posant

$$\frac{\mu}{\rho} = \nu \quad \text{(viscosité cinématique)}.$$

Considérons, avec Blasius, les deux facteurs ξ et ζ tels que

$$\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}}\frac{y}{\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad \Psi = \sqrt{\nu u_\infty x}\,\zeta. \qquad (7)$$

On constatera que ζ n'est fonction que de ξ, ce qui nous permettra de décrire le champ de vitesses avec la seule variable $\frac{y}{\sqrt{x}}$.

Il faut expliciter $\zeta(\xi)$.

([4]) On pourrait même négliger v, comme nous le ferons dans l'étude thermique.

On doit avoir d'après (b)

D'une part

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \sqrt{\nu u_\infty x}\,\zeta'_y,$$

$$\text{où} \quad \zeta'_y = \zeta'_\xi \xi'_y \qquad \text{et} \qquad \xi'_y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}.$$

D'autre part

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu u_\infty}{x}}\,\zeta + \sqrt{\nu u_\infty x}\,\zeta'_x\right),$$

$$\text{où} \quad \zeta'_x = \zeta'_\xi \xi'_x \qquad \text{et} \qquad \xi'_x = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}}\frac{y}{x\sqrt{x}} = -\frac{\xi}{2x},$$

soit

$$\left.\begin{array}{l} u = \frac{u_\infty}{2}\zeta'_\xi, \\ v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu u_\infty}{x}}(\zeta'_\xi \xi - \zeta). \end{array}\right\} \qquad (8)$$

Par conséquent,

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_\infty}{2}\zeta''_\xi \xi'_x, & \text{où} \quad \xi'_x = -\frac{\xi}{2x}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_\infty}{2}\zeta''_\xi \xi'_y, & \text{où} \quad \xi'_y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_\infty}{2}(\zeta'''_\xi \xi'^2_y + \zeta''_\xi \xi''_y), & \text{où} \quad \xi''_y = 0. \end{array}\right.$$

Et l'équation hydrodynamique (a') s'écrit

$$\frac{u_\infty^2}{4}\zeta'_\xi \zeta''_\xi \xi'_x + \frac{u_\infty}{4}\sqrt{\frac{\nu u_\infty}{x}}(\zeta'_\xi \xi - \zeta)\zeta''_\xi \xi'_y = \frac{\nu u_\infty}{2}\zeta'''_\xi \xi'^2_y,$$

où, d'une part,

$$\frac{u_\infty^2}{4}\zeta'_\xi \zeta''_\xi \xi'_x + \frac{u_\infty}{4}\sqrt{\frac{\nu u_\infty}{x}}\zeta'_\xi \zeta''_\xi \xi'_y \xi = -\frac{u_\infty^2}{8x}\zeta'_\xi \zeta''_\xi \xi + \frac{u_\infty^2}{8x}\zeta'_\xi \zeta''_\xi \xi = 0,$$

et, d'autre part,

$$-\frac{u_\infty}{4}\sqrt{\frac{\nu u_\infty}{x}}\zeta\zeta''_\xi \xi'_y = -\frac{u_\infty^2}{8x}\zeta\zeta''_\xi \qquad \text{et} \qquad \frac{\nu u_\infty}{2}\zeta'''_\xi \xi'^2_y = \frac{u_\infty^2}{4x}\zeta'''_\xi.$$

Il reste donc simplement

$$\zeta\zeta''_\xi = -\zeta'''_\xi, \qquad (a'')$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\text{Pour} \quad \left\{\begin{array}{lll} y = 0, & \text{donc} & \xi = 0, \\ y = \infty, & \text{donc} & \xi = \infty, \end{array}\right.$$

$$\text{il faut} \quad \left\{\begin{array}{lllll} u = v = 0, & \text{donc} & \zeta'_\xi = 0, & \text{donc} & \zeta = 0, \\ u = u_\infty, & \text{donc} & \zeta'_\xi = 2. & & \end{array}\right.$$

La solution $\zeta(\xi)$ satisfaisant à ces conditions s'exprime par un développement en série

$$\left.\begin{array}{l} \zeta = \sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n \frac{C_n \alpha^{n+1}}{(3n+2)!}\xi^{3n+2}, \\ \text{où} \\ C_0 = 1, \; C_1 = 1, \; C_2 = 11, \; C_3 = 375, \; C_4 = 27897, \; \ldots \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Sa dérivée première

$$\zeta'_\xi = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{C_n \alpha^{n+1}}{(3n+1)!} \xi^{3n+1} \qquad (10)$$

permet de calculer les vitesses u et v par (8).

Il faut prendre $\alpha = 1{,}326$ pour réaliser $\zeta'_\xi = 2$ pour $\xi = \infty$.

Notons encore en passant que la force de frottement f par unité de surface, sur la face balayée de la plaque, est

$$f = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \mu \frac{u_\infty}{2} (\zeta''_\xi)_{\xi=0} (\xi'_y)_{y=0},$$

avec $(\zeta''_\xi)_{\xi=0} = \alpha + 0 \ldots,$ et $\xi'_y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho u_\infty}{\mu x}},$

soit

$$f = \frac{\alpha}{4}\sqrt{\frac{\rho \mu u_\infty^3}{x}}, \qquad \text{avec} \quad \alpha = 1{,}326. \qquad (11)$$

Ainsi, sous la condition que le fluide ne se dilate pas et qu'en conséquence sa vitesse u_∞ à l'infini reste uniforme, la distribution des composantes de vitesse u et v, régies par (8), ne dépend des coordonnées x et y que par la fonction $\zeta(\xi)$, qu'exprime (9), de la variable auxiliaire ξ que définit (7), c'est-à-dire qu'en définitive les vitesses s'expriment bien par l'unique variable

$$\frac{y}{\sqrt{x}} = Z, \qquad (12)$$

que nous retiendrons pour la suite immédiate.

En d'autres termes, les courbes

$$\xi(x, y) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} \frac{y}{\sqrt{x}} = \text{const.}, \quad \text{ou} \quad Z = \frac{y}{\sqrt{x}} = \text{const.},$$

qui sont des paraboles ayant leur sommet sur le bord d'attaque, figurent des lignes d'égales vitesses u et v, ce qui rend sensible la signification physique de ξ (*fig.* 1).

Si l'on suppose que le frottement est localisé au voisinage de la plaque, dans une « couche-limite » au delà de laquelle se conserverait la vitesse de l'écoulement potentiel, on trouve pour son épaisseur, en y admettant la distribution de vitesse $u(y)$ suivant Blasius :

$$\delta_x = 6x\,\mathcal{R}_{u_\infty, x}^{-0,5} = 6\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \ (^5).$$

D'après (7), elle se trouve coïncider avec la courbe $\xi = 3$. D'après (10) qui donne ζ'_ξ et (8) qui donne u, cette épaisseur correspond en réalité à

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{1}{2}(\zeta'_\xi)_{\xi=3} = 1 - \varepsilon,$$

avec ε très faible mais non nul.

(5) Au lieu de la constante 6, on a parfois adopté les constantes 5,45 ou 4,92, qui répondent la première à un profil $u(y)$ simplifié, l'autre à un choix arbitraire de ε.

Partant de zéro pour $x = 0$, δ_x atteint pratiquement, aux échelles usuelles de x, quelques millimètres pour les liquides et quelques centimètres pour les gaz.

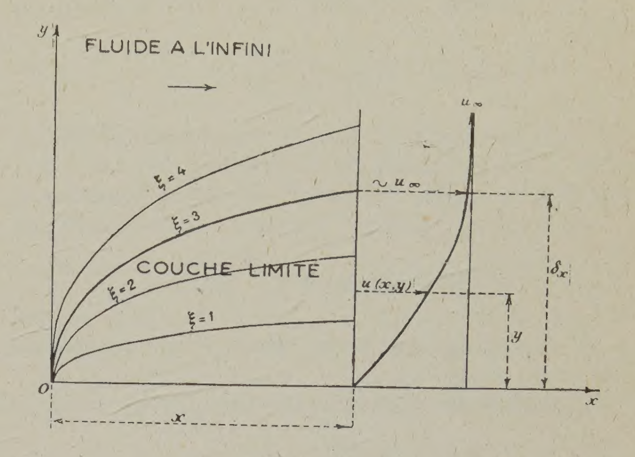


Fig. 1.

Distribution des vitesses dans un écoulement laminaire le long d'une plaque, suivant Blasius.

Lignes d'égale vitesse (ξ = const.), couche-limite ($\xi \leq 3$).

La remarquable propriété qu'ont ξ ou Z de régler u et v cesse d'être exacte dans tous les cas où u_∞ varie (sauf un qui n'offre pas d'application réelle); mais l'expérience a permis d'admettre qu'elle représente encore une approximation pratiquement satisfaisante dans les cas effectivement rencontrés.

2. **Solution de Pohlhausen pour la distribution des températures et le coefficient de convection laminaire morte.** — Pohlhausen observe que, comme celle des vitesses u et v, la distribution des températures T ne doit dépendre des coordonnées x et y que par la variable unique

$$Z = \frac{y}{\sqrt{x}}. \qquad (12)$$

En effet, en régime permanent le long d'une plaque, on peut poser

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad v \ll u \ (^6), \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0,$$

et l'équation de la chaleur (1) devient

$$c \rho u \frac{\partial T}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$$

(6) La suppression de cette hypothèse compliquerait les calculs sans changer leur nature et sans modifier appréciablement les résultats.

Posons que T ne dépend que de la variable Z.
On doit avoir

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{Z}{x}\frac{dT}{dZ}, \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{x}\frac{d^2 T}{dZ^2},$$

et, x s'éliminant, l'équation de la chaleur prend la forme

$$\frac{1}{2} c\rho u Z \frac{dT}{dZ} + \lambda \frac{d^2 T}{dZ^2} = 0. \qquad (13)$$

Or, les facteurs c, ρ, λ sont des constantes ou assimilables à des constantes, et la vitesse u atteinte à une abscisse x donnée ne dépend que de la variable Z.

Introduisons les deux grandeurs sans dimensions

$$\mathcal{S} = \frac{\lambda}{c\rho\nu} \quad \text{(nombre de Stanton)} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{u}{u_\infty}. \qquad (14)$$

η ne dépend comme u que de Z, si u_∞ ne dépend pas de x.

L'équation de la chaleur devient alors

$$\frac{1}{2}\frac{u_\infty}{\nu}\eta(Z) Z \frac{dT}{dZ} + \mathcal{S}\frac{d^2 T}{dZ^2} = 0,$$

et elle fait bien apparaître T comme une fonction de la seule variable Z.

Elle équivaut à

$$\frac{d\left(\frac{dT}{dZ}\right)}{\frac{dT}{dZ}} = -\frac{u_\infty}{2\nu\mathcal{S}}\eta(Z) Z\, dZ.$$

Immédiate, l'intégration donne

$$\frac{dT}{dZ} = A\, e^{-\frac{u_\infty}{2\nu\mathcal{S}}\int_0^Z \eta(Z) Z\, dZ},$$

donc évidemment

$$\left(\frac{dT}{dZ}\right)_{Z=0} = A.$$

On en déduit aussitôt le gradient des températures dans le fluide à la paroi

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_{y=0}\left(\frac{dT}{dZ}\right)_{Z=0} = \frac{1}{\sqrt{x}} A,$$

qui, transporté dans la formule de définition (2) du coefficient de convection, donne l'expression

$$\alpha_x = \frac{\lambda}{T_\infty - \theta_0}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\lambda}{\sqrt{x}}\frac{A}{T_\infty - \theta_0}.$$

On détermine la constante d'intégration A, et même directement le rapport $\frac{A}{T_\infty - \theta_0}$, en exprimant qu'intégrée depuis la plaque ($y = 0$) jusqu'au loin dans le fluide ($y = \infty$), au droit de l'abscisse x, la différentielle de température dT doit restituer l'écart thermique total $T_\infty - \theta_0$ relatif à cette abscisse.

Il vient

$$\int_{y=0}^{y=\infty} dT = \int_{Z=0}^{Z=\infty}\frac{dT}{dZ} dZ = A\int_{Z=0}^{Z=\infty} e^{-\frac{u_\infty}{2\nu\mathcal{S}}\int_0^Z \eta(Z) Z\, dZ}\, dZ = T_\infty - \theta_0,$$

d'où

$$\frac{A}{T_\infty - \theta_0} = \frac{1}{\int_{Z=0}^{Z=\infty} e^{-\frac{u_\infty}{2\nu\mathcal{S}}\int_0^Z \eta(Z) Z\, dZ}\, dZ}.$$

Le coefficient de convection s'explicite donc comme il suit

$$\alpha_x = \frac{\lambda}{\sqrt{x}}\frac{1}{\int_0^\infty e^{-\frac{u_\infty}{2\nu\mathcal{S}}\int_0^Z \eta(Z) Z\, dZ}\, dZ},$$

où les facteurs Z, dZ et $\eta(Z)$ s'expriment tous en fonction de la seule variable auxiliaire ξ de Blasius.

D'après les relations (7) et (12) comparées, on a

$$Z = 2\sqrt{\frac{\nu}{u_\infty}}\,\xi,$$

donc

$$dZ = 2\sqrt{\frac{\nu}{u_\infty}}\, d\xi \quad \text{et} \quad Z\, dZ = 4\frac{\nu}{u_\infty}\xi\, d\xi. \qquad (15)$$

D'après les relations (14) et (8) combinées, on a

$$\eta = \frac{u}{u_\infty} = \frac{1}{2}\zeta'_\xi. \qquad (16)$$

En remplaçant dans l'expression précédente du coefficient de convection, il vient, après simplifications,

$$\alpha_x = \frac{\lambda}{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{\frac{\nu}{u_\infty}}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{\mathcal{S}}\int_0^\xi \zeta'_\xi \xi\, d\xi}\, d\xi}$$

soit encore

$$\boxed{\alpha_x = \frac{\lambda}{2J_1}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}}, \qquad (17)$$

avec

$$\boxed{J_1 = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{\mathcal{S}}\int_0^\xi \zeta'_\xi \xi\, d\xi}\, d\xi}, \qquad (18)$$

où l'on remplacera ζ'_ξ d'après (10), ce qui donnera

$$\int_0^\xi \zeta'_\xi \xi\, d\xi = \int_0^\xi \sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n \frac{C_n \alpha^{n+1}}{(3n+1)!}\xi^{3n+2}\, d\xi,$$

soit

$$\int_0^\xi \zeta'_\xi \xi\, d\xi = \sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n \frac{C_n \alpha^{n+1}}{(3n+1)!}\frac{\xi^{3n+3}}{3n+3}. \qquad (19)$$

La formule (17), complétée par (18) compte tenu de (19), est l'expression exacte du coefficient de convection d'après Pohlhausen.

[Dans une Note antérieure basée sur la considération de la « couche-limite », nous avions été conduits à l'expression

$$\alpha_x = \frac{\lambda}{6 I_1}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}, \tag{17'}$$

avec

$$I_1 = \int_0^1 e^{-\frac{18}{\mathcal{S}}\int_0^\theta \eta(\theta)\theta\, d\theta}\, d\theta \quad (^7), \tag{18'}$$

où la variable auxiliaire θ représentait la cote y rapportée à l'épaisseur δ_x de la « couche-limite » à la même abscisse x

$$\theta = \left(\frac{Z}{Z_\delta}\right)_x = \frac{y}{\delta_x} = \frac{y}{6\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}}\frac{y}{\sqrt{x}},$$

alors qu'ici

$$\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}}\frac{y}{\sqrt{x}}.$$

Cette variable auxiliaire θ était donc liée à la variable ξ considérée ici, par une loi de proportionnalité

$$\theta = \frac{\xi}{3},$$

ainsi qu'on peut le voir en partant de la signification physique de ξ, l'épaisseur de la couche-limite correspondant à $\xi = 3$ et à $\theta \simeq 1$.

En fonction de ξ, il vient

$$\eta = \frac{u}{u_\infty} = \frac{\zeta'_\xi}{2}, \qquad d\theta = \frac{d\xi}{3}, \qquad \theta\, d\theta = \frac{\xi\, d\xi}{9},$$

$$\frac{18}{\mathcal{S}}\eta(\theta)\theta\, d\theta = \zeta'_\xi\, \xi\, d\xi,$$

ce qui conduit à

$$I_1 = \frac{1}{3}\int_0^1 e^{-\frac{1}{\mathcal{S}}\int_0^\theta \zeta'_\xi \xi\, d\xi}\, d\xi.$$

D'où, en négligeant l'influence du fluide au delà de la couche-limite, entre $\theta = 1$ et $\theta = \infty$,

$$I_1 \simeq \frac{J_1}{3}, \qquad 6 I_1 \simeq 2 J_1,$$

ce qui entraîne l'équivalence des deux expressions (17) et (17′) du coefficient de convection].

Il faut calculer l'intégrale purement numérique J_1, définie par la formule (18), $\int_0^\xi \zeta'_\xi \zeta\, d\xi$ étant fournie par la formule (19), où l'on donnera à n, successivement, les valeurs 0, 1, 2, etc.

(7) *C. R. Acad. Sc.*, 1942, **214**, p. 301.
Pour éviter toute confusion avec la variable de Blasius, à laquelle il est très généralement affecté, nous remplaçons ici par le symbole θ le symbole ζ utilisé dans notre Note en cause.

On obtient

$$J_1 = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{\mathcal{S}}\left[1{,}326\frac{\xi^3}{3} - \frac{(1{,}326)^2}{4!}\frac{\xi^6}{6} + \frac{11(1{,}326)^3}{7!}\frac{\xi^9}{9!} - \dots\right]} d\xi.$$

Mettons en évidence le groupement variable

$$\varphi = \left(\frac{1{,}326}{3\mathcal{S}}\right)^{\frac{1}{3}}\xi, \qquad \text{avec} \quad d\xi = \left(\frac{3\mathcal{S}}{1{,}326}\right)^{\frac{1}{3}} d\varphi.$$

On obtient

$$J_1 = \left(\frac{3\mathcal{S}}{1{,}326}\right)^{\frac{1}{3}}\int_{\varphi=0}^{\varphi=\infty} e^{-\varphi^3 + \frac{3\mathcal{S}}{2.4!}\varphi^6 - \frac{11.3\mathcal{S}^2}{7!}\varphi^9 \dots} d\varphi.$$

Lorsque la variable φ est petite, les termes en φ^6, φ^9, ..., qui entrent dans l'exponentielle sont négligeables devant le terme en φ^3. Lorsque φ est grand, l'exponentielle elle-même est négligeable.

En consentant à une erreur secondaire qui sera corrigée plus loin, on se bornera donc à écrire

$$J_1 = \left(\frac{3}{1{,}326}\right)^{\frac{1}{3}}\mathcal{S}^{\frac{1}{3}}\int_0^\infty e^{-\varphi^3}\, d\varphi,$$

avec

$$\left(\frac{3}{1{,}326}\right)^{\frac{1}{3}} \simeq 1{,}315 \qquad \text{et} \qquad \int_0^\infty e^{-\varphi^3}\, d\varphi \simeq 0{,}852,$$

d'où, enfin,

$$J_1 \simeq 1{,}315 \times 0{,}852\,\mathcal{S}^{\frac{1}{3}} = 1{,}1204\,\mathcal{S}^{\frac{1}{3}}, \qquad 2J_1 \simeq 2{,}241\,\mathcal{S}^{\frac{1}{3}}.$$

En définitive, le coefficient de convection admet pour expressions

$$\alpha_x = \frac{\lambda}{2{,}241\,\mathcal{S}^{\frac{1}{3}}}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} = 0{,}446\,\mathcal{S}^{-\frac{1}{3}}\lambda\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}. \tag{20}$$

En faisant disparaître la viscosité cinématique ν au profit du nombre de Stanton $\mathcal{S}$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\lambda}{\mathcal{S} c \rho}, \qquad \text{d'où} \qquad \lambda\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} = \mathcal{S}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\lambda c \rho u_\infty}{x}},$$

on peut encore lui donner les formes suivantes

$$\alpha_x = \frac{\mathcal{S}^{\frac{1}{6}}}{2{,}241}\sqrt{\frac{\lambda c \rho u_\infty}{x}} = 0{,}446\,\mathcal{S}^{\frac{1}{6}}\sqrt{\frac{\lambda c \rho u_\infty}{x}}. \tag{21}$$

Le calcul complet de J_1, compte tenu des termes supérieurs en φ, a fourni à Pohlhausen un coefficient 0,332 au lieu du coefficient 0,446 : c'est là l'effet des termes négligés.

Bien que ces termes fassent intervenir $\mathcal{S}$ un peu différemment, nous admettrons que les formes (20) et (21) restent valables.

Les expressions plus exactes et classiques (8) du

(8) *Voir* M. G. Ribaud, *Mémorial des Sciences physiques*, XL, p. 26 à 28.

coefficient de convection morte sont ainsi les suivantes :

$$\boxed{\alpha_x = 0{,}332\,\mathcal{S}^{-\frac{1}{3}}\lambda\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} = 0{,}332\,\mathcal{S}^{\frac{1}{6}}\sqrt{\frac{\lambda c \rho u_\infty}{x}}}. \qquad (22)$$

Notons qu'elles répondent à

$$J_1 \simeq 1{,}1204\,\mathcal{S}^{\frac{1}{3}} \times \frac{0{,}446}{0{,}332} \simeq 1{,}50\,\mathcal{S}^{\frac{1}{3}},$$

donc à

$$I_1 \simeq \frac{J_1}{3} \simeq 0{,}50\,\mathcal{S}^{\frac{1}{3}}.$$

En particulier, pour les gaz biatomiques, qui dominent dans l'air et dans les fumées, on a

$$\mathcal{S} = 1{,}34, \qquad \mathcal{S}^{-\frac{1}{3}} = 0{,}907, \qquad 0{,}332\,\mathcal{S}^{-\frac{1}{3}} = 0{,}301,$$

et le coefficient de convection se précise ainsi

$$\boxed{\alpha_x = 0{,}301\lambda\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}}. \qquad (23)$$

3. **Caractère local des solutions de Blasius et de Pohlhausen dans les gaz soumis à des échanges calorifiques.** — La solution de Blasius

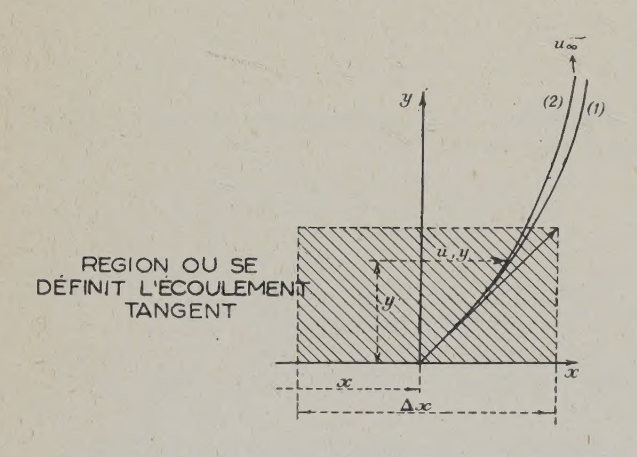


Fig. 2. — Définition d'un écoulement de Blasius tangent à l'écoulement réel pour une tranche d'abscisse Δx.

pour les vitesses u et celle de Pohlhausen pour les température T supposent essentiellement que la vitesse « à l'infini » u_∞ est constante et uniforme, c'est-à-dire qu'à quelque distance de la paroi elle est indépendante de la longueur x parcourue par le fluide le long de la plaque considérée.

En revanche, la solution de Pohlhausen ne suppose pas explicitement, en plus, que la température T_∞ à quelque distance de la paroi est constante et uniforme. En effet, l'équation (2) qui définit le coefficient de convection α_x peut s'entendre localement, pour une tranche Δx découpée dans le fluide autour de l'abscisse x envisagée, la valeur de T_∞ et celle de θ_0 se rapportant à cette abscisse; ceci, à la seule condition que $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ soit bien négligeable, comme nous avons dû le supposer.

Pour que la vitesse à l'infini u_∞ soit uniforme sans que la température à l'infini le soit, il est nécessaire que le fluide ne subisse aucune dilatation ou contraction, ce qui n'est exactement vérifié que dans les liquides et les gaz isothermes, sièges de réactions équimoléculaires.

C'est là une restriction fort importante, puisqu'en principe elle exclut des applications les cas les plus fréquents où le fluide, gazeux, cède ou perd beaucoup de chaleur.

Elle semble avoir échappé aux usagers, qui appliquent les formules (21) à (23), aux fluides dilatables comme aux autres.

Nous pensons que la solution de Pohlhausen reste cependant parfaitement suffisante pour définir un coefficient de convection à l'abscisse x, si l'on introduit dans les formules (21) à (23) la valeur numérique de T_∞ et celle de u_∞ qui conviennent à la situation *locale* de l'écoulement.

Cette façon de procéder revient (*fig.* 2) à remplacer l'écoulement réel, qui, dans son ensemble, diffère de l'écoulement de Blasius à cause des dilatations ou contractions, par une suite d'écoulements de Blasius dont chacun offre *localement* un profil $u(y)$ de vitesse (courbe 2) qui aboutit, sur la paroi, tangentiellement au profil $u(y)$ réel (courbe 1).

Réalisant le même gradient de vitesse $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$ à la paroi, ils respectent chacun le frottement local

$$f = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0},$$

totalisant ainsi le même frottement d'ensemble.

D'après l'équation fondamentale de la chaleur, ils respectent aussi chacun le gradient de température $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$ à la paroi, donc le transfert de chaleur unitaire local

$$Q = \lambda\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0},$$

totalisant ainsi le même échange d'ensemble.

Pratiquement, nous appellerons écoulement de Blasius *tangent* relatif à l'abscisse x celui qui, sur une tranche Δx aussi mince qu'on le voudra prise autour de x, donne le *même frottement local* que l'écoulement vrai; ce sont ses caractéristiques, notamment sa vitesse à l'infini u_∞, connue par le frottement f grâce à la formule (11), que nous aurons à introduire dans le calcul du coefficient de convection.

On profitera de ce fractionnement pour ajuster les valeurs de $\mathcal{S}$, c, ρ, λ ou μ dans la couche-limite, qu'on a dû supposer constantes bien qu'elles varient

avec la température, sauf ρ pour les liquides et δ pour les gaz.

En résumé, *la solution de Pohlhausen pour le coefficient de convection α_x n'a de valeur absolue qu'à la limite, pour des fluides non dilatables; dans les autres cas, il n'a qu'une valeur locale, valable pour une tranche d'abscisse Δx d'autant moins étendue que l'isothermie est moins bien vérifiée, encore que l'usage se soit établi de l'étendre dans tous les cas à l'ensemble de la surface balayée.*

III. — La convection vive d'un fluide actif s'écoulant en régime laminaire permanent le long d'une plaque.

1. **Possibilité d'une solution pour la distribution des températures.** — L'équation de la chaleur devient (3) au lieu de (1), la distribution des températures T en fonction des coordonnées x et y est donc autre. Pour la même température à l'infini, le profil $T(y)$ des températures à l'abscisse x (*fig.* 3) se déforme de (1) en (2), sa pente est modifiée, en particulier la valeur $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$ qu'elle prend sur la paroi. Le coefficient de convection α_x, qui est toujours défini par la relation (2), n'obéit donc plus à la même loi.

On se rend tout de suite compte de l'erreur qui consiste à appliquer les formules (21) à (23) à la transmission de la chaleur par une flamme ou par une lessive en réaction.

Pour un fluide, soit chaud ($T_\infty > \theta_0$), soit froid ($T_\infty < \theta_0$), le profil des températures (*fig.* 3) devenant soit (2), soit (2′) au lieu de (1), le gradient de température sur la paroi, $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$, et par conséquent le coefficient de convection, $\alpha_x = \frac{\lambda}{T_\infty - \theta_0}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$, se trouvent être augmentés ou diminués, suivant que la réaction échauffe ou refroidit le fluide au voisinage de la plaque, pour une même température T_∞ à l'infini.

Nous nous proposons essentiellement de calculer un coefficient de convection qui puisse toujours se comparer directement à celui de Pohlhausen.

Il semble dès l'abord qu'une difficulté insurmontable s'y oppose :

Dans la solution de Pohlhausen, bâtie sur l'équation restreinte de la chaleur (1), la température T ne dépend que de la seule variable $Z = \frac{y}{\sqrt{x}}$, mais quand, dans l'équation généralisée (3), nous introduisons le terme complémentaire q, qui dépend séparément de x et de y, cette circonstance simplificatrice disparaît. Pour déterminer le problème, il faudra se fixer des conditions aux limites différentes, plus précises, de sorte que la comparaison envisagée avec le coefficient de Pohlhausen perdra toute signification, à supposer que l'on ait pu intégrer l'équation de la chaleur.

Écrivons l'équation générale de la chaleur (3) dans le cas de l'écoulement plan, en exprimant que,

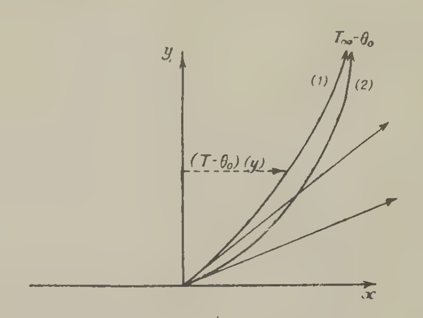


Fig. 3. — Distribution des températures à l'abscisse x dans le fluide, pour une température à l'infini T_∞ donnée : Profil (1) en convection morte, profil (2) en convection vive ($\mp q$ étant du signe de $T_\infty - \theta_0$).
Les deux coefficients de convection sont entre eux comme les pentes, sur l'axe normal y, des tangentes aux deux profils sur la paroi.

pour les termes renouvelés de l'équation restreinte (1), la température T ne dépend que de la variable unique Z. Il vient, par analogie avec (13),

$$\frac{1}{2} c\rho u Z \frac{dT}{dZ} + \lambda \frac{d^2T}{dZ^2} = \mp xq(u, x). \qquad (24)$$

Si nous admettons que l'écoulement de Blasius se conserve, la vitesse u n'est fonction que de Z, mais le terme du deuxième membre, $xq(u, x)$, n'est pas réductible à cette seule variable.

Cependant, nous avons vu que, si l'on y regarde de près, le coefficient de convection de Pohlhausen n'a pour les gaz qu'une signification locale, propre à une abscisse x déterminée.

Si l'on consent à raisonner encore *localement*, pour les abscisses d'une petite tranche Δx autour de x, il est possible d'exprimer le deuxième membre de (24) en fonction de la seule variable Z, après quelques transformations tout à fait acceptables.

La connaissance de l'écoulement de Blasius, jointe à celle de la nouvelle fonction $xq(u, x)$, permet alors de procéder au nouveau calcul de $\frac{dT}{dZ}$, donc de $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$, et d'en déduire, par une méthode calquée sur celle de Pohlhausen, un coefficient de convection α_x qui est localement exact et directement comparable à celui de Pohlhausen pour la même abscisse x, comme correspondant au même type d'écoulement et défini en fonction des mêmes éléments.

2. **Explicitation du terme complémentaire dans l'équation de la chaleur.** — Nous considérerons le cas particulier très important où la

chaleur q apportée à l'unité de volume provient d'une réaction telle que la combustion dans une flamme, et s'exprime comme on l'a vu par (6), Q_f représentant ici la chaleur potentielle contenue (ou encore contenue) dans l'unité de volume du fluide quand il aborde la plaque sur l'arête $x = 0$. Le terme complémentaire admet donc pour expression brute

$$xq(u, x) = Q_f a x \frac{T_0}{T} e^{-\int_0^x a(T) \frac{dx}{u}}.$$

Son aspect suggère de substituer à la variable x les variables sans dimensions $\frac{ax}{u}$, puis $\int_0^x \frac{a\,dx}{u} = \chi$, en écrivant

$$xq(u, x) = Q_f u \frac{T_0}{T} \frac{\left(\int_0^x \frac{a\,dx}{u}\right) \frac{ax}{u}}{\int_0^x \frac{a\,dx}{u}} e^{-\int_0^x a(T) \frac{dx}{u}}.$$

On posera

$$m_1 = \frac{\frac{ax}{u}}{\int_0^x \frac{a\,dx}{u}} \qquad (25)$$

et

$$m_2 = \int_0^x \frac{a\,dx}{u} e^{-\int_0^x \frac{a\,dx}{u}} = \chi e^{-\chi}. \qquad (26)$$

Il vient alors

$$xq(u, x) = Q_f u \frac{T_0}{T} m_1 m_2.$$

Dans chaque tranche Δx autour de l'abscisse x, la vitesse u varie rapidement à partir de zéro et la température absolue T varie moins rapidement à partir de θ_0, quand le filet considéré s'élève à partir de $y = 0$.

Les groupements m_1 et m_2 varient évidemment peu, ce qui nous autorise à les remplacer, dans la tranche considérée, par leurs valeurs moyennes obtenues en faisant varier y. Nous grouperons en une seule constante locale l'ensemble des termes « moyennisés »

$$\overline{m} = \overline{m_1}\,\overline{m_2}. \qquad (27)$$

Si la température ne varie pas considérablement d'un point à un autre, le facteur $a(T)$ varie assez peu lui-même, et la quantité m_1 définie par (25) reste *très* voisine de 1.

Nulle pour $\chi = 0$ et pour $\chi = \infty$, la quantité m_2 définie par (26) passe pour $\chi = 1$ par un maximum égal à $\frac{1}{e} = \frac{1}{2{,}718}$. Elle reste longtemps voisine de ce maximum.

C'est seulement pour les valeurs très faibles ou très fortes de

$$\chi = \int_0^x \frac{a\,dx}{u} \sim \frac{ax}{u} = -\frac{1}{n} \frac{dn}{dt} \frac{x}{u}, \qquad (28)$$

c'est-à-dire pour les réactions presque achevées ($n \to 0$), les vitesses de réaction très lentes ou très rapides $\left(\frac{dn}{dt} \to 0 \text{ ou } \infty\right)$, les vitesses d'écoulement très rapides ou très lentes ($u \to \infty$ ou 0), les abscisses balayées très courtes ou très longues ($x \to 0$ ou ∞), que m_2 devient très petit par rapport à son maximum $\frac{1}{e}$.

Le long d'une plaque donnée, x croissant de zéro à l'infini, n décroissant de n_0 à 0, la constante locale $\overline{m}$ définie par (25), (26) et (27) part donc de zéro pour y revenir, après avoir plafonné sous son maximum, sur une longueur $\Sigma \Delta x$ d'autant plus étendue que la vitesse de réaction est plus faible et la vitesse d'écoulement plus forte.

D'importantes erreurs dans l'appréciation de la loi de réaction ne peuvent modifier beaucoup les composantes m_1 et m_2 du facteur m, donc ce facteur lui-même, ce qui est satisfaisant.

Pour les cas normaux de flammes dans les fours, on ne se trompera guère en posant en première approximation

$$\overline{m} = \overline{m_1}\,\overline{m_2} = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4},$$

et il sera toujours loisible d'obtenir une valeur locale plus précise de m par des relevés de température et des analyses de gaz pris dans les flammes.

En définitive, dans chaque tranche Δx, nous assimilerons le terme complémentaire à sa valeur moyenne, qui s'écrira

$$xq(u, x) = Q_f \overline{m} \frac{T_0}{T} u. \qquad (29)$$

Bien entendu, nous déformons un peu le profil $T(y)$, d'où une certaine erreur sur $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$, donc sur la valeur du coefficient de convection qui sera calculée plus loin.

3. **Solution généralisée pour la distribution des températures et le coefficient de convection laminaire vive.** — L'équation de la chaleur (24) prend localement la forme

$$\frac{1}{2} u Z \frac{dT}{dZ} + \frac{\lambda}{c\rho} \frac{d^2 T}{dZ^2} = \mp Q_f \frac{\overline{m}}{c\rho} \frac{T_0}{T} u.$$

Pour les liquides, le facteur $\frac{T_0}{T}$ est à remplacer par 1 et $\rho = \rho_0$, densité initiale.

Pour les gaz, le facteur $\frac{T_0}{T}$ est en général différent de 1, et alors ρ est variable.

En appelant ρ_n la densité *normale* et ρ_0 la densité *initiale* des gaz de la flamme, qu'on assimilera à des gaz parfaits, il vient

$$\rho = \frac{\rho_n}{\alpha T},$$

donc

$$\frac{1}{\rho}\frac{T_0}{T} = \frac{\alpha T_0}{\rho n} = \frac{1}{\rho_0} \qquad \text{et} \qquad \mp Q_f \frac{\overline{m}}{c\rho}\frac{T_0}{T}u = \mp Q_f \frac{\overline{m}}{c\rho_0}u.$$

Introduisons la variable auxiliaire ξ définie par (15), telle que

$$Z = 2\sqrt{\frac{\nu}{u_\infty}}\,\xi,$$

soit

$$Z\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}Z} = \xi\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\xi}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}Z^2} = \frac{1}{4}\frac{u_\infty}{\nu}\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}\xi^2},$$

ainsi que les deux grandeurs sans dimensions définies par (14)

$$\mathcal{S} = \frac{\lambda}{c\rho\nu} \qquad \text{et} \qquad \eta = \frac{u}{u_\infty}.$$

L'équation de la chaleur devient, pour tous les fluides,

$$\frac{1}{2}\eta\xi\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\xi} + \frac{1}{4}\mathcal{S}\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}\xi^2} = \mp\frac{\overline{m}Q_f}{c\rho_0}u, \tag{30}$$

où ρ_0 désigne la densité initiale pour les gaz comme pour les liquides.

Ainsi qu'on l'a vu, η ne dépend comme u que de ξ, si u_∞ ne dépend pas de x. On a encore

$$\eta = \frac{1}{2}\zeta'_\xi.$$

L'équation de la chaleur (30) fait donc bien apparaître T comme une fonction de la seule variable ξ.

Son intégration est possible, et la solution générale en $\frac{dT}{d\xi}$ est

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\xi} = \left[D \mp \int_0^\xi \frac{2}{\mathcal{S}}\frac{\overline{m}Q_f}{c\rho_0}\zeta'_\xi\, e^{\frac{1}{\mathcal{S}}\int_0^\xi \zeta'_\xi\xi\,\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi\right] e^{-\frac{1}{\mathcal{S}}\int_0^\xi \zeta'_\xi\xi\,\mathrm{d}\xi},$$

d'où évidemment

$$\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\xi}\right)_{\xi=0} = D.$$

On en déduit aussitôt le gradient des températures dans le fluide à la paroi

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_{y=0}\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\xi}\right)_{\xi=0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}\,D,$$

qui, transporté dans la formule de définition (2) du coefficient de convection, donne l'expression

$$\alpha_x = \frac{\lambda}{T_\infty - \theta_0}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}\,\frac{D}{T_\infty - \theta_0}.$$

On détermine la constante d'intégration D, et même directement le rapport $\frac{D}{T_\infty - \theta_0}$, en exprimant qu'intégrée depuis la plaque ($y = 0$, $\xi = 0$) jusqu'au loin dans le fluide ($y = \infty$, $\xi = \infty$), au droit de l'abscisse x, la différentielle de température $\mathrm{d}T$ doit restituer l'écart thermique total $T_\infty - \theta_0$ relatif à cette abscisse. Il vient

$$\int_{y=0}^{y=\infty}\mathrm{d}T = \int_{\xi=0}^{\xi=\infty}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi = D\int_{\xi=0}^{\xi=\infty} e^{-\frac{1}{\mathcal{S}}\int_0^\xi \zeta'_\xi\xi\,\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi$$
$$\mp\frac{2}{\mathcal{S}}\frac{\overline{m}Q_f}{c\rho_0}\int_{\xi=0}^{\xi=\infty}\mathrm{d}\xi\, e^{-\frac{1}{\mathcal{S}}\int_0^\xi \zeta'_\xi\xi\,\mathrm{d}\xi}\int_0^\xi \zeta'_\xi\, e^{\frac{1}{\mathcal{S}}\int_0^\xi \zeta'_\xi\xi\,\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}$$
$$= T_\infty - \theta_0,$$

d'où

$$\frac{D}{T_\infty - \theta_0} = \frac{\left\{1 \pm \frac{2}{\mathcal{S}}\frac{\overline{m}Q_f}{c\rho_0(T_\infty - \theta_0)}\int_{\xi=0}^{\xi=\infty}\mathrm{d}\xi\, e^{-\frac{1}{\mathcal{S}}\int_0^\xi \zeta'_\xi\xi\,\mathrm{d}\xi} \times \int_0^\xi \zeta'_\xi\, e^{\frac{1}{\mathcal{S}}\int_0^\xi \zeta'_\xi\xi\,\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi\right\}}{\int_{\xi=0}^{\xi=\infty} e^{-\frac{1}{\mathcal{S}}\int_0^\xi \zeta'_\xi\xi\,\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi}.$$

Le coefficient de convection s'explicite donc comme il suit

$$\boxed{\alpha_x = \frac{\lambda}{2J_1}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}\left[1 \pm \frac{2J_2}{\mathcal{S}}\frac{\overline{m}Q_f}{c\rho(T_\infty - \theta_0)}\right]}, \tag{31}$$

en posant comme antérieurement

$$\boxed{J_1 = \int_{\xi=0}^{\xi=\infty} e^{-\frac{1}{\mathcal{S}}\int_0^\xi \zeta'_\xi\xi\,\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi}, \tag{18}$$

et, d'autre part,

$$\boxed{J_2 = \int_{\xi=0}^{\xi=\infty}\mathrm{d}\xi\, e^{-\frac{1}{\mathcal{S}}\int_0^\xi \zeta'_\xi\xi\,\mathrm{d}\xi}\int_0^\xi \zeta'_\xi\, e^{\frac{1}{\mathcal{S}}\int_0^\xi \zeta'_\xi\xi\,\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\xi}. \tag{32}$$

La formule (31), complétée par (18) et (32) compte tenu de (19), est l'expression localement exacte du coefficient de convection généralisé.

[Dans la Note antérieure des *Comptes rendus*, basée sur la considération de la couche-limite, nous avions été conduits à l'expression

$$\alpha_x = \frac{\lambda}{6I_1}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}\left[1 \pm \frac{36I_2}{\mathcal{S}}\frac{\overline{m}Q_f}{c\rho(T_\infty - \theta_0)}\right], \tag{31'}$$

avec, comme on a vu,

$$6I_1 \simeq 2J_1 \simeq 3\mathcal{S}^{\frac{1}{3}}$$

et, d'autre part,

$$I_2 = \int_0^1 \mathrm{d}\theta\, e^{-\frac{18}{\mathcal{S}}\int_0^\theta \eta(\theta)\theta\,\mathrm{d}\theta}\int_0^\theta \eta(\theta)\, e^{\frac{18}{\mathcal{S}}\int_0^\theta \eta(\theta)\theta\,\mathrm{d}\theta}\,\mathrm{d}\theta, \tag{32'}$$

où

$$\theta = \frac{y}{\delta_x} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}}\frac{y}{\sqrt{x}} = \frac{\xi}{3}, \qquad \mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}\xi}{3},$$

$$\eta(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\zeta'_\xi}{2}\frac{\mathrm{d}\xi}{3}, \qquad \frac{18}{\mathcal{S}}\eta(\theta)\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\mathcal{S}}\zeta'_\xi\xi\,\mathrm{d}\xi,$$

ce qui conduit à

$$I_2 = \frac{1}{3 \times 2 \times 3} \int_0^1 \mathrm{d}\xi \, e^{-\frac{1}{\mathcal{S}} \int \zeta'_\xi \xi \, \mathrm{d}\xi} \int_0^\xi \zeta'_\xi \, e^{\frac{1}{\mathcal{S}} \int_0^\xi \zeta'_\xi \xi \, \mathrm{d}\xi} \, \mathrm{d}\xi.$$

En négligeant l'influence du fluide au delà de la couche-limite, entre $\theta = 1$ et $\theta = \infty$, il vient

$$I_2 \sim \frac{J_2}{18}, \qquad 36 I_2 \sim 2 J_2,$$

ce qui entraîne l'équivalence des deux expressions (31) et (31′) du coefficient de convection $\Big]$.

Il faut calculer l'intégrale purement numérique J_2 définie par la formule (32), $\int_0^\xi \zeta'_\xi \xi \, \mathrm{d}\xi$ étant fournie par la formule (19), où l'on donnera à n, successivement, les valeurs 0, 1, 2, etc.

Comme pour l'intégrale J_1, la solution exacte est très laborieuse.

Compte tenu des autres approximations faites, il est indiqué de s'en tenir au premier terme du développement de ζ'_ξ, d'où

$$\int_0^\xi \zeta'_\xi \xi \, \mathrm{d}\xi = \frac{1,326}{3} \xi^3,$$

ce qui donne

$$J_2 = \int_{\xi=0}^{\xi=\infty} \mathrm{d}\xi \, e^{-\frac{1,326}{3\mathcal{S}} \xi^3} \int_0^\xi 1,326 \xi \, e^{\frac{1,326}{3\mathcal{S}} \xi^3 \, \mathrm{d}\xi}.$$

Mettons encore en évidence le groupement variable

$$\varphi = \left(\frac{1,326}{3\mathcal{S}}\right)^{\frac{1}{3}} \xi, \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{d}\xi = \left(\frac{3\mathcal{S}}{1,326}\right)^{\frac{1}{3}} \mathrm{d}\varphi.$$

On obtient après simplifications

$$J_2 = 3\mathcal{S} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\infty} \mathrm{d}\varphi \, e^{-\varphi^3} \int_0^\varphi \varphi \, e^{\varphi^3} \, \mathrm{d}\varphi.$$

La valeur de J_2 est ici proportionnelle à $\mathcal{S}$.

Pour le nombre $\mathcal{S} = 1,33$ des gaz biatomiques, on a très sensiblement $\frac{\mathcal{S}}{1,326} \simeq 1$, et des calculs très fastidieux, sur lesquels nous ne nous étendrons pas, donnent

$$J_2 = 1,53.$$

Pour l'ensemble des fluides, nous pouvons donc admettre comme valeur approchée

$$J_2 = 1,53 \frac{\mathcal{S}}{1,33} = 1,15\mathcal{S}.$$

En définitive, le coefficient de convection prend pour expression

$$\boxed{\alpha_x = 0,332\,\mathcal{S}^{-\frac{1}{3}} \lambda \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \left[1 \pm 2,30 \frac{\bar{m} Q_f}{c\rho_0 (T_\infty - \theta_0)}\right] = [\alpha_x]_1 + [\alpha_x]_2}. \quad (33)$$

On remarquera que $\mathcal{S}$ n'apparaît plus au second terme du crochet.

En faisant disparaître la viscosité cinématique ν au profit du nombre de Stanton $\mathcal{S}$, on peut encore lui donner la forme suivante

$$\boxed{\alpha_x = 0,332\,\mathcal{S}^{\frac{1}{6}} \sqrt{\frac{\lambda c \rho u_\infty}{x}} \left[1 \pm 2,30 \frac{\bar{m} Q_f}{c\rho_0 (T_\infty - \theta_0)}\right] = [\alpha_x]_1 + [\alpha_x]_2}. \quad (34)$$

Pour les gaz biatomiques en particulier, le coefficient de convection d'après (33) se précise ainsi

$$\boxed{\alpha_x = 0,301 \lambda \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} \left[1 \pm 2,30 \frac{\bar{m} Q_f}{c\rho_0 (T_\infty - \theta_0)}\right] = [\alpha_x]_1 + [\alpha_x]_2}. \quad (35)$$

Les calculs qui nous ont conduits à ces formes du coefficient de convection vive n'impliquent aucune hypothèse restrictive concernant l'évolution possible de la réaction, antérieurement à l'arrivée du fluide sur la surface ($x = 0$) : seule, la constante Q_f doit être éventuellement réduite de la chaleur déjà libérée par la réaction.

4. Caractère local de notre solution généralisée. — Comme la solution de Pohlhausen concernant $[\alpha_x]_1$, et pour les mêmes raisons, notre solution concernant α_x suppose que le fluide n'est pas sujet à des dilatations ou à des contractions, ce qui n'est exactement vérifié que dans les liquides et dans les gaz isothermes.

Quand le fluide est le siège d'une réaction, telle qu'une combustion, elle accentue généralement les variations de température à distance dans le fluide, encore qu'il existe des cas où elle les atténue au contraire.

Comme la solution de Pohlhausen appliquée aux fluides dilatables, notre solution reste cependant suffisante pour définir le coefficient de convection local à l'abscisse x, si l'on introduit dans les expressions (33) ou (34) les valeurs numériques des facteurs $\mathcal{S}$, λ, c, ρ, u_∞ qui conviennent à la situation locale de l'écoulement, et notamment la vitesse à l'infini u_∞ d'un écoulement de Blasius *tangent* à l'écoulement vrai pour cette abscisse.

Le critère pratique d'un tel écoulement sera encore qu'il donne la même perte de pression que l'écoulement réel, sur une tranche d'abscisse Δx, comme il a été dit.

Si ce critère est lui-même inaccessible, on pourra en première approximation définir l'écoulement tangent en lui donnant la vitesse et la température à l'infini de l'écoulement réel.

Par la suite, dans les cas où l'on pourra craindre qu'à distance de la paroi, l'écoulement réel s'écarte trop de l'écoulement tangent, on pourra demander à des expériences systématiques les coefficients de majoration ou de minoration qu'il convient d'appliquer aux facteurs u_∞ et T_∞ de l'écoulement réel pour obtenir des résultats corrects.

Mais nous devons observer que ceux qui jusqu'ici

ont appliqué la théorie de Pohlhausen, et *a fortiori* toutes autres plus simples, n'ont pas connu de tels scrupules.

En résumé, avec ou sans réaction, la solution de Blasius pour l'écoulement n'est valable que dans un domaine restreint, et *la vraie signification des formules* (33) *à* (35) *est de permettre, en chaque abscisse, une comparaison locale légitime de la convection vive ou totale avec la convection morte de Pohlhausen*, ce qui constitue un résultat essentiel.

5. **Expressions approchées de l'écart thermique total.** — *En principe*, pour le cas pur d'une convection avec réaction, l'écart thermique total $T_\infty - \theta_0$, de l'écoulement réel résulte de l'équation (3) de la chaleur écrite au delà de la couche-limite, q restant exprimée par (6); on a

$$\frac{dT_\infty}{dx} = \pm \frac{q}{c\rho u_\infty}, \qquad \text{avec} \quad q = Q_f a_\infty \frac{T_0}{T_\infty} e^{-\int_0^x a_\infty \frac{dx}{u_\infty}}.$$

L'intégration pour T_∞ exige l'introduction d'hypothèses plus grossières que celles ayant présidé au calcul de α_x par $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$.

Pour les liquides, $\frac{T_0}{T_\infty}$ ne joue pas, on a $u_\infty = u_0 =$ const. et $\rho_\infty = \rho_0 =$ const.

Dans la mesure où a_∞ est invariable, il vient

$$\frac{dT_\infty}{dx} = \pm \frac{Q_f}{c\rho} \frac{a_\infty}{u_\infty} e^{-\int_0^x a_\infty \frac{dx}{u_\infty}} \sim \pm \frac{Q_f}{c\rho}\left(\frac{a_\infty}{u_\infty} e^{-\frac{a_\infty x}{u_\infty}}\right),$$

ce qui donne

$$T_\infty - \theta_0 = (T_0 - \theta_0) \pm \frac{Q_f}{c\rho}\left(1 - e^{-\frac{a_\infty x}{u_\infty}}\right). \qquad (36)$$

Pour les gaz, $\frac{T_0}{T_\infty}$ joue, u_∞, ρ_∞ et a_∞ sont très variables.

Si l'on admet que la dilatation des filets se fait uniquement suivant Ox, et que $a_\infty(T_\infty)$ est linéaire, *hypothèses courantes des théories classiques de la déflagration*, on a

$$u_\infty = u_0 \frac{T_\infty}{T_0}, \qquad \rho_\infty = \rho_0 \frac{T_0}{T_\infty}, \qquad a_\infty = kT_\infty,$$

donc

$$\frac{a_\infty}{u_\infty} = \frac{a_0}{u_0} = \text{const.}$$

et il vient

$$\frac{dT_\infty}{dx} = \pm \frac{Q_f}{c\rho_0}\left(\frac{a_0}{u_0} e^{-\frac{a_0 x}{u_0}}\right),$$

ce qui donne

$$T_\infty - \theta_0 = (T_0 - \theta_0) \pm \frac{Q_f}{c\rho_0}\left(1 - e^{-\frac{a_0 x}{u_0}}\right). \qquad (36')$$

Sinon, il faut procéder par tranches.

En fait, la réaction donne souvent naissance à des constituants qui, comme CO^2 et H^2O dans les flammes, sont nettement émissifs et entretiennent avec les parois un rayonnement réciproque qui atténue fortement les variations de l'écart thermique à quelque distance, surtout si l'écoulement est lent ou la réaction « paresseuse »; la diffusion de veines froides et les dissociations jouent dans le même sens.

On n'est donc presque jamais en droit d'expliciter q à l'infini, simplement d'après (6). Nous reviendrons sur les calculs plus exacts.

Pour l'instant, notons que dans le cas des flammes de fours, les observations montrent que l'écart $T_\infty - \theta_0$ reste souvent sensiblement uniforme sur des surfaces étendues, sous les influences combinées de la combustion et des dissociations, du rayonnement et des diffusions.

(*A suivre.*)

GROUPEMENT ET DÉGROUPEMENT AU SEIN D'UN FAISCEAU CATHODIQUE INJECTÉ DANS UN ESPACE EXEMPT DE CHAMPS EXTÉRIEURS, APRÈS AVOIR ÉTÉ MODULÉ DANS SA VITESSE. I.

Par R. WARNECKE, J. BERNIER et P. GUÉNARD.

Sommaire. — Lorsque l'on provoque par un moyen quelconque, dans un faisceau électronique, une perturbation périodique du temps de transit, il se produit un groupement spatial des électrons; la densité de ce groupement dépend, en particulier, de la forme de l'action perturbatrice. Dès que ce groupement apparaît, il se manifeste, dans le faisceau, des forces de répulsion d'origine électrostatique qui tendent à modifier le rassemblement en voie de formation.

Dans la première partie de cette étude, les auteurs considèrent des tubes électroniques dans lesquels un faisceau rectiligne, après avoir été modulé dans sa vitesse, est injecté dans un espace où toute force électrique d'origine extérieure est éliminée grâce à une électrode étui formant écran, et ils déterminent, *sous l'hypothèse du rassemblement cinématique*, la forme de la modulation de vitesse à adopter pour obtenir un groupement conduisant à une cession aussi complète que possible de l'énergie cinétique des électrons à un champ haute fréquence sinusoïdalement variable agissant sur les électrons parallèlement à leur mouvement à la sortie de l'électrode étui.

Dans la seconde partie du travail, les auteurs étudient, pour le même type de tube, la forme que revêt théoriquement le groupement *quand on tient compte des répulsions interélectroniques*. Pour simplifier les développements mathématiques, l'analyse est restreinte au cas d'un faisceau cylindrique parfaitement focalisé de l'extérieur, ayant un diamètre faible devant celui de l'électrode étui et subissant *une modulation de vitesse sinusoïdale de faible profondeur*.

Introduction.

0. A. — **Aperçu des problèmes.** — Comme il ressort de plusieurs exposés [1] [2] de l'un des auteurs, les principes fondamentaux des principaux tubes à modulation de vitesse récemment développés

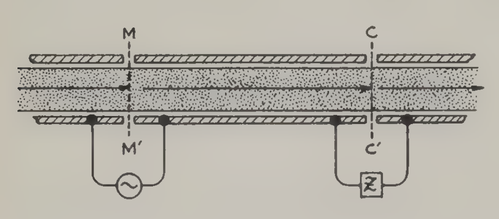


Fig. 1.

pour la production, l'amplification et la détection des oscillations électromagnétiques d'ultra-haute fréquence peuvent être établis à partir du schéma de la figure 1 correspondant aux tubes dits à « conversion par glissement ». Un faisceau rectiligne d'électrons est injecté suivant l'axe d'un cylindre, les électrons étant accélérés avant leur entrée dans ce cylindre et collectés après l'avoir quitté. Le canon électronique et le collecteur d'électrons n'interviennent pas dans les effets de haute fréquence produits, et il est inutile ici d'en envisager la forme constructive.

Le fonctionnement de ces tubes repose sur les actions suivantes :

Aux bornes d'une section MM' d'un tuyau conducteur (organe modulateur ou « rassembleur »), on maintient une différence de potentiel périodique qui, alternativement, accélère et ralentit par rapport à leur vitesse moyenne, les électrons qui traversent cette section. Cette action fait apparaître une pulsation de densité dans le faisceau, c'est-à-dire une modulation du courant de conduction qu'il transporte. Ensuite, par induction, la composante alternative de ce courant, au niveau de la section CC', cède de l'énergie à une impédance Z connectée aux bornes de cette section (organe collecteur d'énergie).

Dans la théorie la plus simple de ce système, on établit les lois du groupement des électrons dans l'espace séparant MM' et CC' en négligeant les effets des électrons les uns sur les autres, et, pour simplifier encore, on suppose qu'il n'existe dans cet espace aucun champ électrique alternatif ou constant d'origine externe, si bien que le groupement se fait par « glissement ». Une telle théorie, appelée « théorie du rassemblement cinématique », esquissée par Heil [3], développée particulièrement par Webster [4] et les auteurs [5] [6], est complétée dans la première partie de cet exposé.

Cette théorie qui tire son intérêt de la simplicité de ses bases et de sa claire représentation physique, est évidemment insuffisante pour rendre compte des faits expérimentaux puisqu'elle néglige tous les effets

de la charge d'espace et, notamment, ceux qui résultent de la naissance des « paquets d'électrons » dans le faisceau; pour conduire à une image plus correcte du phénomène, elle doit donc être au moins complétée ou corrigée : c'est ce qui est fait dans la seconde partie de cet exposé. Après avoir calculé par approximations successives les forces qui s'exercent sur les électrons et les modifications consécutives de leur mouvement, on détermine, pour un certain nombre de cas pratiquement importants, l'amplitude et la phase des premiers harmoniques de l'onde du courant de conduction transporté par le faisceau.

Dans l'une et l'autre des deux parties de l'exposé on supposera implicitement :

a. Que les champs électriques agissant sur les électrons à l'extérieur de l'espace de groupement sont développés entre des électrodes infiniment voisines l'une de l'autre. De cette façon, on néglige, *a priori*, dans les espaces correspondants, les angles de transit des électrons, dont les auteurs ont par ailleurs [5] [6] déterminé, sous les hypothèses du rassemblement cinématique, l'influence particulièrement importante dans le collecteur.

b. Que les tensions alternatives créant les champs qui agissent sur le faisceau sont appliquées entre des électrodes idéales dont les surfaces, perpendiculaires à l'axe du faisceau, sont équipotentielles. L'introduction de cette restriction est importante : non seulement elle fixe la direction des forces électriques qui s'exercent sur les électrons, mais elle élimine encore la nécessité d'introduire, dans les calculs, des coefficients d'efficacité des électrodes tenant compte de ce que leur action sur un électron dépend de sa distance à l'axe du tube.

0. B. — **Expression générale de l'intensité du courant de conduction transporté par un faisceau dans lequel le temps de transit est modulé.** — Considérons un faisceau rectiligne et « homogène » d'électrons se déplaçant dans le vide. Soient t_0 l'époque de passage à l'origine MM′ et t l'époque en un point P. La quantité d'électricité $i_0 \mathrm{d}t_0$ qui est passée en MM′ entre les époques t_0 et $t_0 + \mathrm{d}t_0$ passe en P entre les époques t et $t + \mathrm{d}t$; d'après le principe de conservation de l'électricité, on a :

$$i_0\, \mathrm{d}t_0 = i\, \mathrm{d}t$$

soit

$$\frac{i}{i_0} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_0}} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t_0} + 1}, \tag{1}$$

où $T = t - t_0$ est le temps de transit des électrons. Si celui-ci subit une perturbation périodique, c'est-à-dire si T est fonction périodique de t_0 (de pulsation fondamentale ω), $\frac{i}{i_0}$ sera aussi fonction périodique de t_0 (donc de t) et pourra être considéré comme une somme d'ondes sinusoïdales

$$\frac{i}{i_0} = 1 + \frac{i_1}{i_0} + \ldots + \frac{i_n}{i_0} + \ldots$$

avec

$$\frac{i_n}{i_0} = \mathcal{R}(k_n\, e^{jn\omega t}), \qquad \frac{k_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{i}{i_0} e^{-jn\omega t}\, \mathrm{d}(\omega t). \tag{2}$$

En tenant compte de (1) et en faisant le changement de variables d'intégration $t = t_0 + T(t_0)$, avec $\omega t_0 = \varphi$, $\omega T = \tau$, on a

$$\frac{k_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-jn[\varphi + \tau(\varphi)]}\, \mathrm{d}\varphi. \tag{3}$$

Les k_n s'obtenant par intégration de (3), le calcul de i revient à celui de $\tau = \tau(\varphi)$ en tenant compte des facteurs déterminants qui, dans le cas général, ont une origine à la fois extérieure et intérieure au faisceau.

Ce résultat, tout à fait général, qui met en relief l'effet du temps de transit, d'une part est indépendant de la forme des trajectoires et de la forme du courant i_0 et, d'autre part, *ne suppose rien ni sur la cause de la variation du temps de transit, ni sur la forme de celle-ci* (pourvu cependant qu'elle soit une fonction périodique de t).

PREMIÈRE PARTIE.

Rassemblement cinématique des électrons dans un faisceau après modulation dans sa vitesse. Groupement optimum.

1. A. — **Cas d'un faisceau rectiligne injecté dans un espace exempt de champ de forces extérieures, après avoir subi une modulation sinusoïdale de sa vitesse. Rendement de conversion maximum correspondant.** — Quand on ne tient pas compte de la charge d'espace, le calcul du temps de transit est immédiat : en effet, soit $v_1 = v_0(1 + \delta \sin\varphi)$ la vitesse des électrons à la sortie de MM' (*fig.* 2); le temps que met un électron passant en MM' à l'époque t_0 pour aller en P est $T_1(z) = \frac{z}{v_1}$ d'où, en introduisant les notations $\tau_1 = \omega T_1$, $\lambda = \frac{\omega z}{v_0}$

$$\tau_1 = \frac{\lambda}{1 + \delta \sin\varphi}.$$

Généralement, pour simplifier le calcul (et aussi parce que ce cas est pratiquement avantageux), on admet que $\delta^2\lambda$ est négligeable devant $\delta\lambda$, alors

$$\tau_1 \simeq \lambda - \delta\lambda \sin\varphi, \tag{4}$$

ce qui donne, d'après (2) et (3),

$$\frac{k_n}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{jn(\varphi+\lambda-\delta\lambda\sin\varphi)}\,d\varphi = e^{jn\lambda}J_n(n\delta\lambda), \quad (5)$$

$$\frac{i}{i_0} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(n\delta\lambda)\cos n(\omega t - \lambda). \quad (6)$$

[Dans cet article, $J_n(x)$ représente la fonction de Bessel de première espèce, d'ordre n, et d'argument x.]

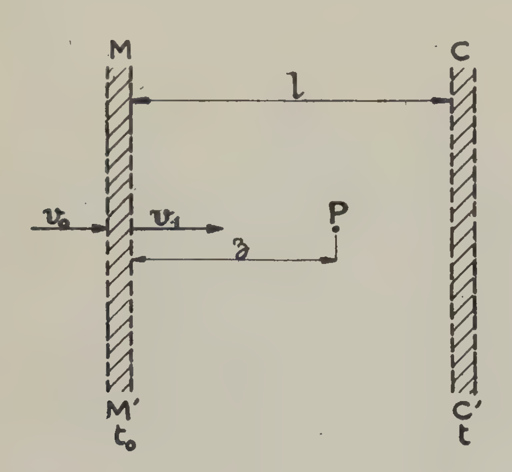


Fig. 2.

On appelle *rendement de conversion* le rapport de l'énergie cédée au champ ultra-haute fréquence du collecteur à l'énergie continue nécessaire pour accélérer le faisceau.

Lorsque le champ du collecteur est sinusoïdal et que le faisceau est modulé en densité par le mécanisme ci-dessus, il résulte de la relation (6), ainsi qu'il est bien connu [4] [1], que la valeur maximum du rendement de conversion ne peut être égale qu'au maximum de $J_1(\delta\lambda)$, soit 0,582 (obtenue pour $\delta\lambda = 1,84$).

1. B. — **Groupement amélioré grâce à une modulation de vitesse non sinusoïdale.** — Pour dépasser la valeur précédente du rendement de conversion, il est nécessaire d'abandonner la forme sinusoïdale de la modulation de vitesse (1). La forme convenable peut être trouvée directement à partir de l'expression générale du rendement de conversion.

Si dans la section CC', d'abscisse l à partir du modulateur (*fig.* 2), le faisceau électronique, dans lequel la modulation de vitesse a provoqué une modulation de densité, traverse un champ électrique étroit dont l'intégrale linéaire dans le sens du mouvement a pour valeur instantanée $-U_2\cos\omega t$, le rendement de conversion pour le réglage optimum de phase a pour expression (2)

$$\eta = \frac{U_2}{U_0}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos[\varphi + \tau_l(\varphi)]\,d\varphi, \quad (7)$$

où U_0 désigne la tension continue correspondant à la vitesse moyenne v_0 des électrons, et τ_l leur angle de parcours entre le modulateur et le collecteur.

En général, la valeur maximum qu'il est possible de donner à U_2 est U_0, car, pour une valeur plus élevée il y a réflexion d'électrons dans le champ

(1) Ce problème de l'amélioration du groupement dans un faisceau commandé par modulation de vitesse, qui vient de faire l'objet d'une communication importante de Borgnis et Ledinegg [9], a été traité antérieurement à ce travail par les auteurs du présent exposé; on trouvera, en effet, le résumé de la première partie de notre article dans le préambule théorique d'un brevet français déposé le 19 septembre 1942 sous le n° 471.736.

(2) L'expression (7) peut être établie indépendamment de la forme du courant transporté par le faisceau de la façon suivante (*voir* [1]) : Soit i_2 l'intensité instantanée du courant transporté par le faisceau au niveau du plan médian du collecteur. Si les électrodes du collecteur sont très voisines l'une de l'autre, le courant induit qui traverse l'impédance shunt de ce dernier est sensiblement égal à i_2. D'autre part, la tension instantanée que ce courant développe entre les électrodes est $u_2 = U_2\cos(\omega t + \beta)$ et, d'après (1), on a $i_2 = i_0\frac{dt_0}{dt}$.
Il s'ensuit que la puissance cédée par le faisceau au champ électrique est

$$W = \overline{i_2 u_2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} i_0 U_2 \frac{dt_0}{dt}\cos(\omega t + \beta)\,d(\omega t).$$

On obtient l'expression (7) en divisant W par $i_0 U_0$, en rendant nul l'angle de phase β et en remplaçant ωt_0 par φ et ωt par $\varphi + \tau_l(\varphi)$.

Au sujet de l'expression précédente de la puissance utile, il convient de noter :

a. Que le fait d'admettre une forme sinusoïdale pour u_2 est légitimé si l'on suppose que cette tension est développée aux bornes d'un système ayant les propriétés d'un circuit antirésonnant.

b. Que la composante du courant induit due au déplacement des électrons est la seule qui présente un intérêt réel puisque la composante capacitive du courant total est éliminée dans le circuit extérieur et ne produit aucune puissance moyenne (*voir* [2], chapitre II).

c. Que pour une durée non négligeable du transit des électrons dans le collecteur, une expression de la puissance utile pourrait être trouvée et utilisée comme celle qui est donnée plus haut. La valeur instantanée du courant induit à introduire pour son calcul (valeur du courant induit résultant des courants induits élémentaires dus à tous les électrons présents à l'instant considéré t entre les électrodes) s'obtiendrait à partir de l'expression

$$i_i = \frac{1}{h}\int_{t-T(t)}^{t}\rho_1(t_1)\,v_1(t_1)\,\frac{dx}{dt}\,dt_1,$$

dans laquelle ρ_1, v_1, t_1 désignent respectivement la densité, la vitesse et l'époque de passage des électrons au niveau de la première électrode du collecteur et T la durée du transit (fonction du temps) entre les électrodes de celui-ci, distantes de h; mais le calcul de la puissance sur ces bases conduirait alors à des résultats d'une forme si compliquée que leur discussion présenterait difficilement un intérêt pour le problème considéré ici et c'est pourquoi le cas du temps de transit négligeable dans le collecteur est seul considéré.

du collecteur et perte correspondante d'énergie. D'autre part la valeur de l'intégrale est maximum lorsqu'on a, quel que soit φ :

$$\cos[\varphi + \tau_l(\varphi)] = 1, \qquad \text{soit} \qquad \varphi + \tau_l(\varphi) = 2k\pi.$$

Ainsi, théoriquement, dans l'hypothèse du rassemblement cinématique, le rendement de conversion d'un tube à temps de transit peut être amené à une valeur voisine de 100 pour 100 (quel que soit le mode de groupement) en faisant en sorte que $\tau_l(\varphi)$ soit une fonction périodique de φ coïncidant avec $2k\pi - \varphi$ dans une période. Ce résultat est général, il est indépendant de la forme de la trajectoire des électrons et du mode de groupement.

Dans le cas particulier du groupement par glissement, on a $\tau_l = \frac{\omega l}{v_1}$ et la condition de rendement de conversion maximum est évidemment, en posant $\lambda_l = \frac{\omega l}{v_0}$

$$\varphi + \lambda_l \frac{v_0}{v_1} = 2k\pi. \tag{8}$$

1. C. — **Forme de « tension » de commande rendant maximum le rendement de conversion dans le cas du groupement par glissement.** — Si l'on continue à supposer que la modulation de vitesse dans le faisceau est provoquée par une différence de potentiel alternative appliquée entre deux grilles idéales très voisines l'une de l'autre (couche électrique double infiniment mince) portées au potentiel U_0 constant, la vitesse v_1 de l'électron à la sortie du système de commande correspond à un potentiel $U_0 + U(\varphi)$ et l'on a $\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2 = 1 + \frac{U(\varphi)}{U_0}$. La condition de rendement maximum s'écrit alors, dans le cas du groupement par glissement :

$$\frac{U(\varphi)}{U_0} = \left(\frac{\lambda_l}{2k\pi - \varphi}\right)^2 - 1.$$

Soit

$$a_0 + a_1\cos\varphi + b_1\sin\varphi + \ldots + a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi + \ldots,$$

le développement en série de Fourier de $\left(\frac{\lambda_l}{2k\pi - \varphi}\right)^2$, le calcul donne $a_0 = \frac{\lambda_l^2}{4\pi^2 k(k-1)}$. D'autre part la valeur moyenne de $U(\varphi)$ étant nulle, a_0 doit être égal à l'unité; ceci impose à λ_l une valeur particulière λ_{l_0}

$$\lambda_{l_0} = 2\pi\sqrt{k(k-1)}. \tag{9}$$

Les coefficients a_n et b_n (*cf.* Annexe I) sont donnés par

$$a_n = \frac{2\lambda_l^2}{4\pi^2 k(k-1)} + \frac{n\lambda_l^2}{\pi}\left[si(2(k-1)n\pi) - si(2kn\pi)\right],$$

$$b_n = \frac{n\lambda_l^2}{\pi}\left[Ci(2(k-1)n\pi) - Ci(2kn\pi)\right],$$

où *si* et *Ci* sont les fonctions sinus-intégral et cosinus-intégral. Ces coefficients tendent vers zéro lorsque n augmente indéfiniment et, en tenant compte de (9), on peut les représenter par les formules asymptotiques

$$a_n \sim \frac{2\times 3!}{n^2\lambda_{l_0}^2} - \frac{2\times 5!}{n^4\lambda_{l_0}^4},$$

$$b_n \sim \frac{-2\times 2!}{n\lambda_{l_0}} + \frac{2\times 4!}{n^3\lambda_{l_0}^3}.$$

Application numérique. — Pour un tube fonctionnant avec $U_0 = 3\,000$ V sur une longueur d'onde de $\Lambda = 25$ cm, la longueur de l'espace de glissement $\left[l = \Lambda\frac{v_0}{c}\sqrt{k(k-1)}\right]$ serait de $l = 6{,}6$ cm pour $k = 3$ ($\lambda_{l_0} = 15{,}4$ radians), de $l = 9{,}35$ cm pour $k = 4$ ($\lambda_{l_0} = 21{,}8$ radians), de $l = 12{,}05$ cm pour $k = 5$ ($\lambda_{l_0} = 26{,}2$ radians); dans ce dernier cas les coefficients du développement seraient

$$b_1 \approx -0{,}140, \qquad a_1 \approx 0{,}015$$
$$b_2 \approx -0{,}071, \qquad a_2 \approx 0{,}004$$
$$b_n \approx -0{,}142/n, \qquad a_n \approx 0.$$

Pour obtenir le rendement maximum de conversion $\eta = \frac{U_2}{U_0}$, l'intégrale du champ dans le collecteur étant toujours de la forme $U_2\cos\omega t$, il faudrait donc que la tension de commande dans le modulateur soit représentée par

$$\frac{U(\varphi)}{U_0} = (-0{,}140\sin\varphi + 0{,}015\cos\varphi) + (-0{,}071\sin 2\varphi + 0{,}004\cos 2\varphi) - 0{,}047\sin 3\varphi - \ldots - \frac{0{,}142}{n}\sin n\varphi - \ldots$$

1. D. — **Forme de la vitesse à la sortie du rassembleur rendant le rendement de conversion maximum dans le cas du groupement par glissement.** — La vitesse v_1 doit satisfaire à l'égalité (8) et doit avoir comme valeur moyenne v_0 (*fig.* 3).

Posons

$$\frac{v_1}{v_0} = 1 + a'_1\cos\varphi + b'_1\sin\varphi + \ldots + a'_n\cos n\varphi + b'_n\sin n\varphi + \ldots$$

La condition que la valeur moyenne de $\frac{v_1}{v_0}$ soit égale à 1 entraîne pour λ_l la valeur λ'_{l_0} déterminée par

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\lambda'_{l_0}}{2k\pi - \varphi}\,d\varphi,$$

c'est-à-dire

$$1 = \lambda'_{l_0}\frac{1}{2\pi}\left[\log 2k\pi - \log 2(k-1)\pi\right],$$

d'où

$$\lambda'_{l_0} = \frac{2\pi}{\log \frac{k}{k-1}} \qquad (k \text{ entier}).$$

Les coefficients a'_n et b'_n sont donnés par

$$a'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \lambda'_{l_0} \frac{\cos n\varphi}{2k\pi - \varphi}\, d\varphi = \frac{\lambda'_{l_0}}{\pi}\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi} \frac{\cos n\psi}{\psi}\, d\psi,$$

$$b'_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \lambda'_{l_0} \frac{\sin n\varphi}{2k\pi - \varphi}\, d\varphi = \frac{\lambda'_{l_0}}{\pi}\int_{2k\pi}^{2(k-1)\pi} \frac{\sin n\psi}{\psi}\, d\psi.$$

d'où

$$\frac{\pi a'_n}{\lambda'_{l_0}} = Ci(2kn\pi) - Ci(2(k-1)n\pi),$$

$$\frac{\pi b'_n}{\lambda'_{l_0}} = si\,(2kn\pi) - si\,(2(k-1)n\pi).$$

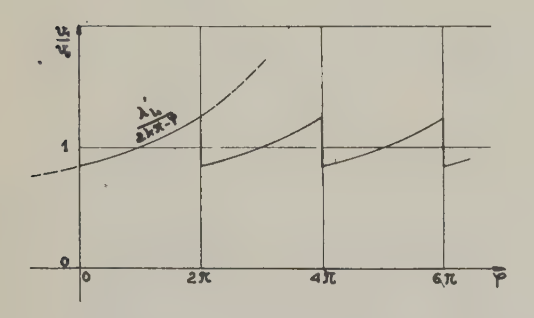


Fig. 3. — Forme de $\frac{v_1}{v_{\text{II}}}$ rendant le rendement de conversion maximum pour le groupement par glissement.

De la même façon que précédemment on peut obtenir des valeurs approchées de a'_n et b'_n à partir des développements asymptotiques de *si* et *Ci*, soient

$$\frac{\pi a'_n}{\lambda'_{l_0}} = \frac{1}{4n^2\pi^2}\,\frac{2k-1}{[k(k-1)]^2},$$

$$\frac{\pi b'_n}{\lambda'_{l_0}} = \frac{1}{2n\pi}\,\frac{1}{k(k-1)} + \frac{2}{(2n\pi)^3}\left[\frac{1}{(k-1)^3} - \frac{1}{k^3}\right].$$

Application numérique. — Reprenant l'exemple précédent pour $k = 5$, on trouve comme valeurs des coefficients (3)

$$a'_n = \frac{0{,}005}{n^2}, \qquad b'_n = -\frac{0{,}071}{n} + \frac{0{,}0005}{n^3}.$$

(3) Les a'_n et b'_n ont des valeurs moitié de celles trouvées dans le développement de $\frac{U(\varphi)}{U_0}$ parce que k a été choisi pour que le rapport des amplitudes des tensions soit petit; par ailleurs, les conditions de rendement maximum sont évidemment les mêmes, $\lambda_{l_0} = \lambda'_{l_0}$ car

$$\frac{2\pi}{\log \frac{k}{k-1}} \approx 2\pi\sqrt{k(k-1)}.$$

1\. E. — **Forme de l'angle de transit $\tau_l(\varphi)$ rendant maximum le rendement de conversion dans le cas d'un mode de groupement quelconque.** — On a déjà montré que la condition de rendement maximum, quel que soit le mode de groupement, est que la fonction périodique $\tau_l(\varphi)$ de période 2π, coïncide avec $2k\pi - \varphi$ entre 0 et 2π.

On en déduit le développement en série de Fourier de la fonction $\tau_l(\varphi)$ optimum

$$\tau_l(\varphi) = a''_0 + a''_1 \cos\varphi + b''_1 \sin\varphi + \ldots + a''_n \cos n\varphi + b''_n \sin n\varphi + \ldots$$

avec

$$a''_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (2k\pi - \varphi)\, d\varphi = (2k-1)\pi,$$

$$a''_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (2k\pi - \varphi)\cos n\varphi\, d\varphi = 0,$$

$$b''_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (2k\pi - \varphi)\sin n\varphi\, d\varphi = \frac{2}{n},$$

d'où

$$\tau_l(\varphi) = (2k-1)\pi + 2\left[\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \ldots + \frac{\sin n\varphi}{n} + \ldots\right]. \quad (10)$$

1\. F. — **Rendement de conversion correspondant à quelques formes particulières de groupement.** — Il est évident qu'au temps de transit optimum exprimé en angle par la relation (10), correspond, lorsque $U_2 = U_0$, un rendement maximum de conversion égal à l'unité

$$\eta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\left[\varphi + 2\sin\varphi + \sin 2\varphi + \frac{2}{3}\sin 3\varphi + \ldots + \frac{2}{n}\sin n\varphi + \ldots\right] d\varphi = 1. \quad (10^{bis})$$

Examinons ce qu'il advient quand le temps de transit n'a pas cette forme idéale, mais une forme qui correspond seulement à l'utilisation des premiers termes du développement.

a. Si le temps de transit varie sinusoïdalement [comme c'est le cas d'après (4) dans les tubes à modulation de vitesse à groupement par glissement, où la tension haute fréquence de commande est faible et sinusoïdale] le réglage défini par

$$\tau_l(\varphi) = (2k-1)\pi + 2\sin\varphi$$

donne, pour $U_2 = U_0$, le rendement de conversion

$$\eta = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\varphi + 2\sin\varphi)\, d\varphi = J_1(2) = 0{,}577.$$

Cette valeur est à peine inférieure à celle du maximum de η (0,582) trouvée au paragraphe 1. A.

et correspondant à un réglage optimum tel que (4)

$$\tau_l(\varphi) = (2k-1)\pi + 1{,}84 \sin\varphi. \qquad (11)$$

b. Si le temps de transit varie comme $a \sin\varphi + b \sin 2\varphi$ le réglage défini par les premiers termes du développement (10), soit

$$\tau_l(\varphi) = (2k-1)\pi + 2\sin\varphi + \sin 2\varphi \qquad (12)$$

correspond pour $U_2 = U_0$ au rendement de conversion.

$$\eta_2 = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\varphi + 2\sin\varphi + \sin 2\varphi)\,d\varphi$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\cos(\varphi + 2\sin\varphi)\cos(\sin 2\varphi) - \sin(\varphi + 2\sin\varphi)\sin(\sin 2\varphi)]\,d\varphi$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\varphi + 2\sin\varphi)\left[J_0(1) + 2\sum_{q=1}^{\infty} J_{2q}(1)\cos 4q\varphi\right]d\varphi$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(\varphi + 2\sin\varphi)\left[2\sum_{p=1}^{\infty} J_{2p-1}(1)\sin 2(2p-1)\varphi\right]d\varphi,$$

on obtient finalement

$$\eta_2 = \left\{ J_0(1)J_1(2) - \sum_{q=1}^{\infty} J_{2q}(1)[J_{4q-1}(2) - J_{4q+1}(2)] + \sum_{p=1}^{\infty} 2(2p-1)J_{2p-1}(1)J_{4p-2}(2) \right\}$$

et, en négligeant les termes inférieurs à 10^{-4},

$$\eta_2 = J_0(1)J_1(2) - J_2(1)J_3(2) + 2J_1(1)J_2(2) = 0{,}737.$$

On peut constater que le maximum de l'intégrale

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\varphi + a\sin\varphi + b\sin 2\varphi)\,d\varphi$$

ne diffère pas sensiblement de 0,737. Ainsi, à partir de deux termes, le réglage optimum est pratiquement défini par les premiers termes du développement de (10).

c. Si le temps de transit varie comme

$$a\sin\varphi + b\sin 2\varphi + c\sin 3\varphi,$$

le réglage optimum est tel que

$$\tau_l(\varphi) \approx (2k-1)\pi + 2\left(\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3}\right) \qquad (13)$$

(4) Lorsque le temps de transit dans l'espace de glissement ne correspond qu'à un nombre limité des termes du développement (10), il convient, pour obtenir la valeur maximum possible du rendement de conversion (puisque des termes manquent alors), de donner aux amplitudes des termes restants des valeurs différentes de celles qui seraient adoptées si le développement complet était utilisé.

et cela correspond pour $U_2 = U_0$ à un rendement de conversion maximum

$$\eta_3 = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\left(\varphi + 2\sin\varphi + \sin 2\varphi + \frac{2}{3}\sin 3\varphi\right)d\varphi,$$

dont la valeur approximative est

$$\eta_3 = J_0\left(\frac{2}{3}\right)\eta_2 + J_1\left(\frac{2}{3}\right) \times \{ J_0(1)[J_2(2) - J_4(2)] + J_1(1)[J_2(2) - J_0(2) - J_4(2)] + J_2(1)[J_2(2) - J_0(2)] + J_3(1)[J_2(2) - J_4(2)] \} + J_2\left(\frac{2}{3}\right) J_2(1)[J_3(2) - J_1(2)] \approx 0{,}751.$$

Les résultats indiqués sous *a*, *b*, *c* montrent que le fait de produire, dans un tube électronique du type considéré, une variation du temps de transit de la forme (12) au lieu d'une variation sinusoïdale de la forme (11) apporterait, pour les conditions de réglage optimum, un accroissement du rendement de conversion de l'ordre de 16 pour 100 tandis que la forme (13) n'apporterait qu'un gain supplémentaire de 1,4 pour 100. On peut montrer facilement que le gain apporté par l'emploi des harmoniques d'ordre de plus en plus élevé est de plus en plus faible, quoique le rendement maximum augmente en tendant vers 100 pour 100 quand on approche de la forme idéale (10). *La signification physique de l'expression* (10bis) *est que tous les électrons sortis du système de commande au cours d'une période passent à la même époque à travers le collecteur, cette époque étant celle où le champ électrique du collecteur est retardateur et maximum en valeur absolue.*

Les auteurs reportent à un article futur la discussion des possibilités techniques de mise en application du principe précédent dont il est superflu de souligner l'important intérêt pratique pour l'augmentation de la puissance des générateurs d'ondes ultra-courtes.

(*A suivre.*)

ANNEXE I.

Soit

$$\left(\frac{\lambda_l}{2k\pi - \varphi}\right)^2 = a_0 + a_1\cos\varphi + b_1\sin\varphi + \ldots + a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi + \ldots,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\lambda_l}{(2k\pi - \varphi)^2}\cos n\varphi\,d\varphi$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{2k\pi}^{2(k-1)\pi} \frac{\lambda_l^2}{\psi^2}\cos n\psi\,d\psi$$

$$= \frac{\lambda_l^2}{\pi}\left\{\left[-\frac{\cos n\psi}{\psi}\right]_{2(k-1)\pi}^{2k\pi} - n\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi}\frac{\sin n\psi}{\psi}\,d\psi\right\}$$

$$= \frac{\lambda_l^2}{\pi}\left[\frac{1}{2(k-1)\pi} - \frac{1}{2k\pi} - n\int_{(2k-1)n\pi}^{2kn\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx\right],$$

de même

$$b_n = -n\frac{\lambda_l^2}{\pi}\int_{2(k-1)n\pi}^{2kn\pi}\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

En introduisant les fonctions

$$si\,y = -\int_y^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad Ci\,y = -\int_y^\infty \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

a_n et b_n se mettent sous la forme

$$a_n = \frac{2\lambda_l^2}{4\pi^2 k(k-1)} + \frac{n\lambda_l^2}{\pi}\left[si(2(k-1)n\pi) - si(2kn\pi)\right]$$

$$b_n = \frac{n\lambda_l^2}{\pi}\left[Ci(2(k-1)n\pi) - Ci(2kn\pi)\right].$$

Ces coefficients tendent vers zéro quand n augmente indéfiniment comme on le voit en remplaçant $Ci\,y$ et $si\,y$ par leurs valeurs asymptotiques $Ci\,y \sim \frac{\sin y}{y}$, $si\,y \sim -\frac{\cos y}{y}$. En utilisant les relations (*cf.* Jahnke Emde, *Funktionen Tafeln*, p. 3)

$$-si\,y + j\,Ci\,y = \frac{e^{jy}}{y}H(jy)$$

avec

$$H(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^2}\ \ldots.$$

On obtient pour $si\,y$ et $Ci\,y$ les valeurs asymptotiques plus approchées

$$-si\,y = \frac{\cos y\,P(y) - \sin y\,Q(y)}{y},$$

$$Ci\,y = \frac{\sin y\,P(y) + \cos y\,Q(y)}{y}$$

avec

$$\begin{cases} P(y) = 1 - \dfrac{2!}{y^2} + \dfrac{4!}{y^4} + \ldots, \\ Q(y) = -\left[\dfrac{1}{y} - \dfrac{3!}{y^3} + \ldots\right], \end{cases}$$

d'où, en posant

$$f(y) = \frac{1 - P(y)}{y}, \qquad g(y) = \frac{Q(y)}{y},$$

$$a_n = \frac{n\lambda_l^2}{\pi}\left[f(2(k-1)n\pi) - f(2kn\pi)\right] \sim -2n^2\lambda_l^2 f'(\alpha),$$

$$b_n = \frac{n\lambda_l^2}{\pi}\left[g(2(k-1)n\pi) - g(2kn\pi)\right] \sim -2n^2\lambda_l^2 g'(\alpha),$$

α étant compris entre $2(k-1)n\pi$ et $2kn\pi$. On peut prendre en particulier $\alpha = \sqrt{4k(k-1)n^2\pi^2} = n\lambda_{l_0}$. En donnant à α cette valeur et en remplaçant dans les formules précédentes λ_l par λ_{l_0}, on obtient finalement

$$a_n \sim \frac{2\times 3!}{n^2\lambda_{l_0}^2} - \frac{2\times 5!}{n^4\lambda_{l_0}^4},$$

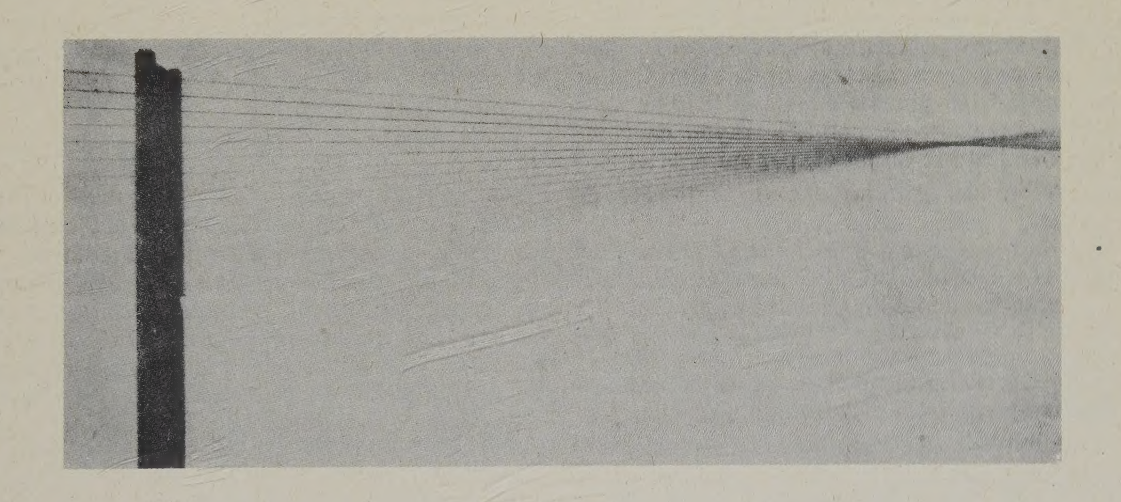
$$b_n \sim -\frac{2\times 2!}{n\lambda_{l_0}} + \frac{2\times 4!}{n^3\lambda_{l_0}^3}.$$

DIAMÈTRE ET VITESSE D'UN JET ISSU D'UN AJUTAGE CYLINDRIQUE

Par Guy LITTAYE.
Laboratoire de Mécanique des Fluides.

Sommaire. — L'auteur mesure aux divers points d'un jet la vitesse du liquide en déterminant la normale en ces points par un procédé optique. Il observe une variation notable de la vitesse au voisinage immédiat de l'orifice, variation conforme aux prévisions théoriques de l'auteur.

Lorsqu'une veine liquide sort à bouche bée d'un ajutage cylindrique suffisamment long, on admet que son diamètre est égal à celui de l'orifice. Nous avons montré ailleurs que cette proposition ne pouvait être tenue pour valable dans tous les cas (¹). Supposons en effet la vitesse assez faible pour que l'écoulement soit laminaire et l'ajutage suffisamment long. Dans une section droite à l'intérieur du tube la vitesse diminue de l'axe à la périphérie suivant une loi parabolique. Dans une section



droite du jet, à une distance suffisante de l'orifice, la vitesse est uniforme. Admettons que la vitesse quadratique moyenne conserve la même valeur : la vitesse moyenne doit être plus grande pour le jet, l'aire d'une section droite doit être plus faible. Le rapport k des diamètres du jet et de l'ajutage doit être 0,84, ceci au moins pour une vitesse suffisante. En effet la tension superficielle du liquide intervient aux faibles vitesses pour modifier la valeur du diamètre de la veine liquide. La surface de la veine se raccorde à la surface extérieure de l'ajutage, sa courbure totale étant alors plus faible au voisinage de l'orifice qu'à une certaine distance de celui-ci. Par suite de l'existence de la tension superficielle, ceci entraîne une augmentation de la pression à l'intérieur du jet, et, corrélativement, une diminution de la vitesse du liquide et une augmentation du diamètre de la veine à mesure qu'on s'éloigne de l'orifice (²). Cet effet sera d'autant plus sensible que la vitesse sera plus faible. La valeur 0,84 se présente ainsi comme une *limite inférieure de k*, atteinte seulement aux vitesses élevées et pour des ajutages de longueur suffisante. Pour des ajutages courts, toutes les valeurs de k

(¹) *C. R. Acad. Sc.*, 1940, **210**, p. 600.

(²) A cet effet, qui est prépondérant, s'ajoute le travail nécessité par l'augmentation de la surface libre du liquide; ce travail entraîne, lui aussi, une diminution de la vitesse du jet.

comprises entre 0,84 et 1 pourront être obtenues; pour de faibles vitesses du jet, la valeur de k pourra même être largement supérieure à l'unité. Ces précisions ont été vérifiées par l'ensemble de nos mesures de diamètre des veines liquides (3).

Nous avons cherché à vérifier directement la variation de vitesse du jet au sortir de l'orifice. Pour cela nous avons employé le dispositif suivant. L'ajutage, un morceau de tube capillaire horizontal de longueur convenable, présente une section elliptique dont le grand axe est vertical. La section droite du jet est alors une ellipse dont le grand axe est alternativement vertical et horizontal lorsqu'on s'éloigne de l'orifice. Le jet est éclairé par un faisceau lumineux parallèle et horizontal qui projette l'ombre de la veine liquide sur une surface photographique sensible. Deux écrans verticaux sont placés respectivement au-dessus et au-dessous du jet; eux aussi portent ombre sur la surface sensible. Chaque onde le long du jet joue le rôle d'une lentille cylindrosphérique; le faisceau qui la traverse vient former un trait lumineux, normal au jet, sur la surface sensible, lorsque celle-ci se trouve à une distance convenable. En utilisant un orifice presque circulaire, on doit placer la surface sensible à une distance notable. Les traits lumineux s'étendent alors, latéralement, à une grande distance de la veine liquide dans l'ombre portée par les écrans. Ils permettent de déterminer, en chaque point, le rayon de courbure r de la trajectoire du jet et, par suite, la vitesse $v = \sqrt{rg}$ du liquide, g représentant l'intensité de la pesanteur.

Les résultats obtenus par cette méthode ont, ici encore, vérifié nos prévisions, comme le montrent les exemples suivants. Le liquide utilisé est l'eau.

I. Pour un ajutage de longueur suffisante, la vitesse du jet croît rapidement au sortir de l'orifice, ce qui correspond à une diminution du diamètre de la veine liquide.

Diamètre de l'orifice, $d = 1{,}00$ mm ;
longueur de l'ajutage, $l = 20{,}8$ mm ; $l : d = 20{,}8$.

(3) *Thèse*, Paris 1942. Par exemple avec l'eau et un tube capillaire, de diamètre 0,84 mm et de longueur suffisante, les valeurs de k à diverses vitesses sont :

Vitesse cm/s.......	134	220	318
k................	0,93	0,90	0,87

Avec l'eau et un orifice en paroi mince de diamètre 0,192 mm la valeur de k est de 1,28 à la vitesse de 116 cm/sec.

Rayon de courbure déterminé au milieu de chacune des ondes successives (cm).	46	76	76	76	71	68
Vitesse moyenne le long de chacune des ondes successives (cm/s).	213	272	272	272	263	259

Débit, 1,70 g/s ; diamètre du jet, 0,89 mm ; $k = 0{,}89$.

II. Pour un ajutage de plus faible longueur, la répartition parabolique des vitesses, dans une section droite du tube, ne peut s'établir parfaitement ; l'effet correspondant peut être compensé par l'action de la tension superficielle du liquide et la vitesse du jet varie peu au sortir de l'orifice; ceci correspond à une variation faible du diamètre de la veine liquide.

Diamètre de l'orifice, $d = 0{,}98$ mm ;
longueur de l'ajutage, $l = 2{,}92$ mm ; $l : d = 3{,}0$.

Rayon de courbure déterminé au milieu des ondes successives (cm).	100	103	104	103	100	101
Vitesse moyenne le long de chacune des ondes successives (cm/s).	314	322	325	322	314	317

Débit, 2,29 g/s ; diamètre du jet, 0,95 mm ; $k = 0{,}97$.

III. Pour de faibles vitesses, l'effet de la tension superficielle devient prépondérant : la vitesse du jet diminue rapidement au sortir de l'orifice. C'est ce que montre la photographie ci-contre sur laquelle on aperçoit nettement la diminution du rayon de courbure, de la première onde aux suivantes. A cette diminution de la vitesse du jet, correspond une augmentation du diamètre de la veine liquide.

Diamètre de l'orifice, $d = 0{,}98$ mm ;
longueur de l'ajutage, $l = 2{,}92$ mm ; $l : d = 3{,}0$.

Rayon de courbure, 12,1 cm ; vitesse du jet, 103 cm/s.

Débit, 1,08 g/s ; diamètre du jet, 1,12 mm ; $k = 1{,}14$.

La méthode précédente de détermination de la vitesse d'un jet liquide a été appliquée avec succès à la mesure de la tension superficielle des liquides par la méthode de vibration des jets. Nous reviendrons ultérieurement sur les résultats obtenus.

Manuscrit reçu le 15 mai 1943.